解答例

# STEP I 1989、第 16 問

確率・統計 ・ ゼロサムゲーム

> **STEP I 1989、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.14 節「**混合戦略**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/mixed-strategies.html

## 鍵となる考え方

すべては一つの小さな表から導かれる。すなわち、9 通りの予想の組それぞれに対する B の獲得額の表である。これを書き出してしまえば、各期待値（expected value）は表の成分の重み付き和にすぎない。最後の小問では、和を A の確率 $a_j$ ごとにまとめることで、「A がどうしようとも」という条件が三つの係数に関する条件に変わる。そして三つすべてを非負にすることは、小さな連立一次不等式（system of linear inequalities）の問題になる。

## 解答

A が $i$ と予想し B が $j$ と予想した回における B の獲得額（ポンド単位）を $w(i,j)$ と書く。規則から読み取ると次のようになる。

- $|i-j|=2$ のとき、1 と言った者が 3 と言った者に 2 ポンド支払うので、$w(1,3)=2$ かつ $w(3,1)=-2$ である。
- $|i-j|=1$ のとき、大きい方の数を言った者が 1 ポンド支払うので、$w(2,1)=w(3,2)=1$ かつ $w(1,2)=w(2,3)=-1$ である。
- $w(i,i)=0$ である。

| | B が 1 と言う | B が 2 と言う | B が 3 と言う |
|---|---|---|---|
| A が 1 と言う | 0 | $-1$ | 2 |
| A が 2 と言う | 1 | 0 | $-1$ |
| A が 3 と言う | $-2$ | 1 | 0 |

$w(j,i) = -w(i,j)$ が成り立つことに注意する。規則は二人の参加者をまったく同じように扱うので、予想を入れ替えると支払う側が入れ替わるのである。

**小問 (i)**

A が常に $N$ と言うならば、B は表の第 $N$ 行を見て、常に最大の成分を選べばよい。

- $N = 1$：B は常に 3 と言い、毎回 £2 を得る。
- $N = 2$：B は常に 1 と言い、毎回 £1 を得る。
- $N = 3$：B は常に 2 と言い、毎回 £1 を得る。

いずれの場合も、この選択が唯一の最善の選択であり、他の応じ方では何も得られないか損をする。

**小問 (ii)**

ある回において、A の予想と B の予想は独立（independent）である（A は自分だけで無作為に選び、B はひそかに決める）。よって A が $i$ と言い B が $j$ と言う確率は $\frac{1}{3}b_j$ である。したがって B の獲得額の期待値は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot \tfrac{1}{3}\big(w(1,j) + w(2,j) + w(3,j)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(b_1(0+1-2) + b_2(-1+0+1) + b_3(2-1+0)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(b_3 - b_1).\end{aligned}$$

となる。$b_3 \le 1$ かつ $b_1 \ge 0$ であるから、これは高々 $\frac{1}{3}$ であり、等号が成り立つのはちょうど $b_3 = 1$ のとき（このとき $b_1 = b_2 = 0$ となる）である。よって B は**常に 3 と予想する**べきであり、そのとき 1 回あたり £$\frac{1}{3}$ の獲得が期待できる。一様に無作為に選ぶ A に対して、予想 3 は £2 を得る、£1 を失う、引き分けるのいずれかが、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で起こる。

**小問 (iii)**

A が確率 $a_i$ で $i$ と予想し、B が確率 $b_j$ で $j$ と予想し、これらが独立であるとき、

$$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\, w(i,j).$$

である。各 $a_i$ ごとに項をまとめる（表の 1 行ずつ）と、

$$\mathrm{E}(W) = \underbrace{(2b_3 - b_2)}_{X}\, a_1 + \underbrace{(b_1 - b_3)}_{Y}\, a_2 + \underbrace{(b_2 - 2b_1)}_{Z}\, a_3.$$

となる。$X \geq 0$、$Y \geq 0$、$Z \geq 0$、すなわち

$$b_2 \leq 2b_3, \qquad b_3 \leq b_1, \qquad 2b_1 \leq b_2.$$

としたい。これらをつなげると $b_2 \leq 2b_3 \leq 2b_1 \leq b_2$ となるので、すべて等号でなければならない。すなわち $b_3 = b_1$ かつ $b_2 = 2b_1$ である。これと $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ をあわせると

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

を得る。このとき $X = Y = Z = 0$ であり、これらは確かに非負である。よってそのような選び方は存在する（実際、それはただ一つである）。

**考えてみよう** B はもっとうまくやって、$X$、$Y$、$Z$ をすべて正にすることができるだろうか？

できない。任意の $b_j$ に対して

$$b_1 X + b_2 Y + b_3 Z = b_1(2b_3 - b_2) + b_2(b_1 - b_3) + b_3(b_2 - 2b_1) = 0,$$

が成り立つ。これは、B が自分自身の複製と対戦すると損得なしになる（表が反対称（antisymmetric）である）ということにほかならない。和が 1 となる非負の重みによる $X, Y, Z$ の重み付き和は、三つすべてが正ならば 0 にはなりえない。上の不等式が等号でしか満たされなかったのはこのためである。

では結論を導こう。$b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ のとき、$a_1, a_2, a_3$ を**どのように**選んでも

$$\mathrm{E}(W) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$$

である。より一般に、$X, Y, Z \geq 0$ であれば、各 $a_i \geq 0$ であるから $\mathrm{E}(W) = Xa_1 + Ya_2 + Za_3 \geq 0$ となる。各回における B の獲得額は独立で同一の分布に従い（両者の予想は回ごとに独立である）、いずれも平均は 0 以上である。大数の法則（law of large numbers）により、多数回にわたる B の 1 回あたりの平均獲得額はこの平均に近づく。よって長期的には、A がどうしようとも B は損をしない。 □

## 検算

- 小問 (ii) は小問 (iii) の特別な場合 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ である。実際 $\frac{1}{3}(X+Y+Z) = \frac{1}{3}(b_3 - b_1)$ となり、先に求めたものと一致する。
- 小問 (i) は $a$ が $N$ にすべての重みを置く場合である。$N = 1$ のとき $\mathrm{E}(W) = X = 2b_3 - b_2$ であり、これは $b_3 = 1$ で最大となって値 2 を与える。
- B が $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ を用い、A が $(0.6, 0.1, 0.3)$ を用いる $2 \times 10^5$ 回のシミュレーションでは、1 回あたりの平均獲得額は約 $-0.004$ であり、0 と矛盾しない。

## よくある間違い

- 符号の取り決めを逆にしてしまうこと。差が 1 のときは**大きい**方の予想をした者が支払うが、差が 2 のときは**小さい**方である。まず表を作り、それが反対称であることを確かめるとよい。
- 小問 (ii) から、B は予想を混ぜるべきだと結論してしまうこと。固定された混合戦略（mixed strategy）に対しては、最善の応じ方は常に純粋戦略（pure strategy）である（ここでは常に 3）。混ぜることが得になるのは、小問 (iii) のように、B が A の**あらゆる**戦略に備えなければならない場合だけである。

## STEP のその先へ

これは二人ゼロ和ゲーム（two-player zero-sum game）であり、小問 (iii) はフォン・ノイマン（von Neumann）のミニマックス定理（minimax theorem）の小さな例である。すなわち B には、A がどうしようともゲームの値以上を保証する混合戦略があり、ゲームが対称なのでその値は 0 である。このような戦略を求めることは線形計画法（linear programming）の問題であり、確率を最適化や経済学と結びつける。確率の側面については Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を、ゲームそのものについては Binmore, *Playing for Real*（ゲーム理論の入門書）を最初に読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。