解答例

STEP I 1989、第 15 問

確率・統計 ・ 分布の比較

> **STEP I 1989、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q15

鍵となる考え方

時速 $12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ では 1 km ごとにちょうど 5 分かかるので、どの道の所要時間も、一定の分数に、ある一つの確率変数（random variable）の単純な定数倍を加えたものになる。その確率変数は一様分布（uniform distribution）、ポアソン分布（Poisson distribution）、二項分布（binomial distribution）のいずれかに従う。したがって、時間に関する問いはすべて、その一つの確率変数に関する問いに帰着する。中間の部分は、等確率で選ばれる三つの道に対するベイズの定理（Bayes' theorem）である。

解答

所要時間

三つの道を通るときの所要時間（分）をそれぞれ T_A, T_B, T_D とする。$12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ は 5 分ごとに 1 km であるから、

- Angle Avenue：$T_A = 25 + A$、ただし $A \sim \mathrm{U}(0, 10)$。
- Bend Boulevard：$T_B = 20 + 3B$、ただし $B \sim \mathrm{Po}(4)$。
- Detour Drive：迂回の回数を X とする。五か所の道路工事がそれぞれ確率 $\frac{4}{5}$ で互いに独立に迂回を生じさせると仮定すると、$X \sim \mathrm{B}(5, \frac{4}{5})$ であり、距離は $2 + X$ km、所要時間は $T_D = 10 + 5X$ となる。

27 分以上かかる確率

Angle Avenue。 $T_A \geq 27 \iff A \geq 2$ であるから、

$$\mathrm{P}(T_A \geq 27) = \frac{10-2}{10} = \frac{4}{5}.$$

Bend Boulevard。 B は整数であるから、$T_B \geq 27 \iff 3B \geq 7 \iff B \geq 3$ である。よって

$$\mathrm{P}(T_B \geq 27) = 1 - \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!}\right) = 1 - 13\mathrm{e}^{-4} \approx 0.7619.$$

Detour Drive。 $T_D \geq 27 \iff 5X \geq 17 \iff X \geq 4$ である。よって

$$\mathrm{P}(T_D \geq 27) = 5\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^4\left(1 + \frac{4}{5}\right) = \frac{256}{625}\cdot\frac{9}{5} = \frac{2304}{3125} = 0.73728.$$

所要時間が長かったとき、どの道だったか

選んだ道を R とし、$\mathrm{P}(R=A) = \mathrm{P}(R=B) = \mathrm{P}(R=D) = \frac{1}{3}$ とする。また、所要時間が 27 分以上である事象を L とする。ベイズの定理により、因子 $\frac{1}{3}$ は約分されて消える：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R=B \mid L) &= \frac{\mathrm{P}(L \mid B)}{\mathrm{P}(L \mid A) + \mathrm{P}(L \mid B) + \mathrm{P}(L \mid D)} = \frac{1 - 13\mathrm{e}^{-4}}{\frac{4}{5} + 1 - 13\mathrm{e}^{-4} + \frac{2304}{3125}} \\ &= \frac{1 - 13\mathrm{e}^{-4}}{\frac{7929}{3125} - 13\mathrm{e}^{-4}} \approx \frac{0.7619}{2.2992} \approx 0.331.\end{aligned}$$

これは $\frac{1}{3}$ をわずかに上回るだけである。三つの道はいずれも、27 分以上かかる確率がほぼ等しいのだから、これは納得のいく結果である。

小問 (i)

$\mathrm{E}(A) = 5$、$\mathrm{E}(B) = 4$、$\mathrm{E}(X) = 5 \times \frac{4}{5} = 4$ と期待値の線形性（linearity of expectation）を用いると、

$$\mathrm{E}(T_A) = 25 + 5 = 30, \qquad \mathrm{E}(T_B) = 20 + 3 \times 4 = 32, \qquad \mathrm{E}(T_D) = 10 + 5 \times 4 = 30.$$

考えてみよう 二つの道が同じ値になった。これは計算の誤りだろうか？

そうではない。Angle Avenue と Detour Drive はどちらも平均がちょうど 30 分であり、Bend Boulevard の平均は 32 分である。したがって、平均所要時間をできるだけ小さくするには、Angle Avenue と Detour Drive の**どちらか**を使えばよい。この二つは同等に良く、どちらも Bend Boulevard より優れている。

小問 (ii)

次に、各道について $\mathrm{P}(T < 32)$ を比較する。

- $T_A < 32 \iff A < 7$ であるから、$\mathrm{P}(T_A < 32) = \frac{7}{10} = 0.7$。
- $T_B < 32 \iff 3B < 12 \iff B \leq 3$ であるから、

$$\mathrm{P}(T_B < 32) = \mathrm{e}^{-4}\left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3}\right) = \frac{71}{3}\mathrm{e}^{-4} \approx 0.4335.$$

- $T_D < 32 \iff 5X < 22 \iff X \leq 4$ であるから、

$$\mathrm{P}(T_D < 32) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{2101}{3125} \approx 0.6723.$$

$0.7 > 0.6723 > 0.4335$ であるから、常に **Angle Avenue** を使うべきである。そうすれば、70% の日に 32 分未満で到着できる。

検算

- 400 000 回の移動をシミュレーションしたところ、$\mathrm{P}(T \geq 27) \approx 0.801,\ 0.761,\ 0.740$、平均所要時間 $\approx 30.0,\ 32.0,\ 30.0$ 分、$\mathrm{P}(T < 32) \approx 0.700,\ 0.435,\ 0.670$、$\mathrm{P}(R = B \mid L) \approx 0.331$ という結果が得られた。いずれも厳密な値と一致する。
- 境界の確認：Detour Drive で迂回が 3 回なら所要時間は 25 分、4 回なら 30 分であるから、「27 分以上」はたしかに「迂回が 4 回以上」を意味する。

よくある間違い

- 整数条件をいい加減に扱うこと。$3B \geq 7$ は $B \geq 2$ ではなく $B \geq 3$ を意味し、$3B < 12$ は $B \leq 4$ ではなく $B \leq 3$ を意味する。
- Detour Drive の基本距離 2 km を忘れること。あるいは、他の道で 1 km あたり 5 分の走行時間を忘れること。
- (i) で勝者を一つに決めてしまうこと。二つの平均はちょうど等しい。

STEP のその先へ

小問 (i) と (ii) は、「最良」が何を最適化するかによって変わることを示している。平均は分布を要約する一つの指標にすぎず、平均が同じ二つの道でも、散らばり（spread）や裾確率（tail probability）は大きく異なりうる。決定理論（decision theory）では、

これは**損失関数**（loss function）の選択にあたる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ここで扱った分布とベイズの定理を扱っている。Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）には、この種の問題が数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。