解答例

STEP I 1989、第 13 問

力学 ・ 摩擦のある梯子のつり合い

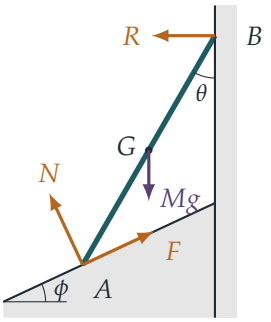
> **STEP I 1989、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q13

鍵となる考え方

これは三つの力に摩擦力が加わったつり合い（equilibrium）の問題であり、要点は方向をうまく選ぶことにある。はしごの下端のまわりのモーメント（moment）を考えると N と F がともに消え、壁からの抗力がただちに求まる。次に、水平方向と鉛直方向に分解する代わりに、**斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向**に力を分解する（resolve）。それぞれの式には未知数 N と F の一方しか含まれないので、与えられた式がそのまま導かれる。

解答

はしごを長さ $2a$ の一様な棒 AB とみなし、その重心（centre of mass）G は中点にあるとする。下端 A は粗い斜面上にあり、上端 B はなめらかな壁に接しているので、壁からの抗力 R は水平で、壁から離れる向きである。A には斜面に垂直な垂直抗力（normal reaction）N と、斜面に沿った摩擦力（friction）F がはたらく。はしごは下端が斜面を下る向き、すなわち壁から離れる向きにすべろうとするので、F は斜面を上る向き、つまり壁に向かう向きにはたらくとする（F の式は正になることがわかり、この選び方が正しいことが確かめられる）。



壁からの抗力

A のまわりのモーメントを考えると、N と F が消える。はしごは鉛直方向と角 θ をなすので、B は A より高さ $2a\cos\theta$ だけ上にあり、G は A から水平距離 $a\sin\theta$ の位置にある。B における水平な力 R のモーメントは $R\cdot 2a\cos\theta$ であり、重力のモーメントは逆向きに $Mg\cdot a\sin\theta$ であるから、

$$2aR\cos\theta = Mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad R = \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta.$$

斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向への分解

> **考えてみよう** それぞれの式に未知数が一つだけ含まれるようにするには、どの方向に分解すればよいか。

斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向に分解する。F は斜面に垂直な成分をもたず、N は斜面に沿った成分をもたない。残りの二つの力の成分を求めればよい。

- 重力 Mg は、斜面に押しつける向きに成分 $Mg\cos\phi$、斜面を下る向きに成分 $Mg\sin\phi$ をもつ。
- 斜面は壁に向かって上っているので、斜面の上向きの法線は壁から離れる側に傾いている。したがって水平な力 R（これも壁から離れる向き）は、その法線方向に成分 $R\sin\phi$ をもつ。すなわち斜面から**離れる**向きである。斜面に沿った方向では、R は壁から離れる向き、つまり斜面を下る向きであり、その成分は $R\cos\phi$ である。

斜面に垂直な方向：

$$N + R\sin\phi = Mg\cos\phi,$$

$$\text{よって}\quad N = Mg\cos\phi - \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta\sin\phi = Mg\left(\cos\phi - \frac{\tan\theta\sin\phi}{2}\right).$$

斜面に沿った方向（斜面を上る向きを正とする）：

$$F = Mg\sin\phi + R\cos\phi \quad \Longrightarrow \quad F = Mg\left(\sin\phi + \frac{\tan\theta\cos\phi}{2}\right).$$

これらが求める二つの結果である。

最大の角

下端がすべらないためには、接触が保たれること、すなわち $N > 0$ と、摩擦力が限界を超えないこと、すなわち $\mu = 2$ として $F \le \mu N$ が必要である（ここでは $F > 0$ なので、摩擦に関する条件はこれだけである）。$\phi = 45^\circ$ のとき $\sin\phi = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、$t = \tan\theta$ とおくと

$$F = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{t}{2}\right), \qquad N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

よって $N > 0$ には $t < 2$ が必要であり、このとき $F \le 2N$ は

$$1 + \frac{t}{2} \le 2 - t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3t}{2} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\theta \le \frac{2}{3}.$$

となる。これは $t < 2$ より厳しいので、こちらが効いてくる条件である。$\tan\theta$ は $0 < \theta < 90^\circ$ で増加するので、はしごがつり合って静止できる最大の角は

$$\theta = \arctan\tfrac{2}{3} \approx 33.7^\circ,$$

であり、この角において摩擦は限界の状態（limiting friction）にある。

検算

- $\phi = 0$（水平な地面）のとき、式から $N = Mg$ および $F = \frac{1}{2}Mg\tan\theta = R$ が得られる。これは水平な床に立てかけたはしごについてのおなじみの結果である。
- $\theta = 0$（はしごが鉛直）のとき、壁は何の力も及ぼさず、$N = Mg\cos\phi$、$F = Mg\sin\phi$ となる。これは斜面上に静止している質点の場合とまったく同じである。
- 数値的に、ランダムな θ と ϕ について水平方向と鉛直方向の力のつり合いの式を直接解くと、両方の式と 10^{-13} の精度で一致する。また $\phi = 45^\circ$ のとき、比 F/N は $\theta = 33.690^\circ$ で 2 を通過する。

よくある間違い

- $R\sin\phi$ の項の符号を誤る。斜面は壁に向かって上っているので、R は下端を斜面から部分的に**引き離す**向きにはたらき、N を減少させる。
- 水平方向と鉛直方向に分解し、得られた連立方程式を解く途中で誤る。この方法でも解けるが、斜面に沿った方向と垂直な方向に分解するほうがはるかに速い。

STEP のその先へ

斜面が急になるほど、はしごを傾けられる角は小さくなることに注意しよう。これは、壁からの抗力が N を減らす一方で F を増やすからである。このような問題は静力学（statics）の入り口であり、そこでは未知数を切り離すように座標軸とモーメントの中心を選ぶ。同じ考え方は、トラスや骨組み構造の解析、さらに一般に安定性の解析の基礎となっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体のつり合いと摩擦を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。