解答例

STEP I 1989、第 12 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

> **STEP I 1989、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q12

鍵となる考え方

すべては正四面体（regular tetrahedron）の幾何に帰着する。すなわち、その質量中心（centre of mass）が頂点からどれだけ離れているか、面からどれだけ離れているか、そして頂点を通る軸からどれだけ離れているかである。この三つの長さが求まれば、前半はフックの法則（Hooke's law）を当てはめるだけである。後半では、対称性により運動は純粋な鉛直方向の並進（translation）に保たれる。四面体は静止状態から動き始め、静止状態で終わるので、運動方程式（equation of motion）はまったく必要ない。重力による位置エネルギー（gravitational potential energy）と弾性エネルギー（elastic potential energy）の収支を考えれば十分である。

解答

四面体の幾何

棒は一様な剛体の棒、糸はフックの法則に従う軽い弾性糸としてモデル化する。各棒の質量はその中点に集中しているとみなせる。どの頂点も六本の棒のうちちょうど三本に属するので、六つの中点の平均は四つの頂点の平均に等しい。したがって、質量中心 G は四面体の重心（centroid）である。

面 BCD は一辺 $2a$ の正三角形であるから、その中心 N は B、C、D のそれぞれから距離

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

にある。四面体の高さは $AN = \sqrt{(2a)^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$ である。重心は AN 上に

あり、面から測って全体の四分の一の高さにある。よって

$$GN = r = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a, \qquad GA = GB = GC = GD = R = \frac{\sqrt{6}}{2}\,a.$$

（検算として、$R^2 = \rho^2 + r^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{3}{2}a^2$ である。）

張力

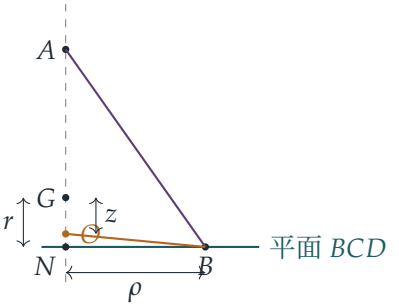
X が G にあるとき、各糸の長さは $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$、伸び（extension）は $R - a = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,a > 0$ であるから、四本ともぴんと張っている。フックの法則により、各糸の張力（tension）は

$$T = \frac{\lambda(R-a)}{a} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\,\lambda \approx 0.225\,\lambda.$$

XA が切れた後

切れる前、四つの等しい張力は各頂点を G へ向かう四つの方向に引いている。G は重心であるから、G から各頂点へ向かう単位ベクトルの和は零であり、糸は正味の力を及ぼさず、台が重さ Mg をすべて支えている。

XA が切れると、残りの三本の糸は合計で鉛直上向きに大きさ T の力で引く。これは失われた XA の引く力を符号反転したものである。水平方向には、鉛直線 AN のまわりの三回対称性により三つの力は打ち消し合う。各力はこの直線を含む鉛直面内にあるので、ねじる偶力（couple）は生じず、傾ける偶力も対称性により打ち消し合う。したがって四面体は純粋な鉛直方向の並進運動をし、AN は O を通る鉛直線上にとどまる。$T > Mg$ であるから四面体は台から離れる。このことは最後に確かめる。



O から測った G の高さを z とする。このとき B は O を通る鉛直線から水平距離 ρ の位置にあり、O に対する高さは $z - r$ であるから、三本の糸の長さはいずれも

$$L(z) = \sqrt{\rho^2 + (z-r)^2}.$$

最初は $z = 0$ で $L = \sqrt{\rho^2 + r^2} = R$ である。最高点では BCD が O と同じ高さになるの

で、$z = r$ かつ $L = \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}a$ である。$0 \le z \le r$ では L は ρ と R の間にあり、どちらも a より大きいので、糸は運動中ずっと張ったままである。

> **考えてみよう** 扱いにくい非線形の運動方程式を解かずに、最高到達点の高さを求めるにはどうすればよいか？

台はなめらかで糸は軽いので、力学的エネルギーは保存される（conservation of mechanical energy）。四面体はすぐに台から離れるので、垂直抗力（normal reaction）は仕事をしない。四面体は最初も最高点でも静止しているので、運動エネルギーは式から消える。三本の糸が失う弾性エネルギー $3 \cdot \dfrac{\lambda(L-a)^2}{2a}$ は、得られる重力による位置エネルギー Mgr に等しくなければならない：

$$Mg\,r = \frac{3\lambda}{2a}\Big[(R-a)^2 - (\rho-a)^2\Big].$$

括弧内を変形し、$R^2 - \rho^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$ を用いると、

$$\begin{aligned}(R-a)^2 - (\rho-a)^2 &= R^2 - \rho^2 - 2a(R-\rho)\\ &= a^2\Big(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big).\end{aligned}$$

$\dfrac{3}{2ar} = \dfrac{3}{2a}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{6}\,a} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2a^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{Mg}{\lambda} &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\Big(\tfrac{1}{6} - \sqrt{6} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 + 6\sqrt{2}\\ &\approx 0.6124 - 9 + 8.4853 = 0.0977,\end{aligned}$$

となり、有効数字 2 桁で 0.098 である。これが求める結果である。

最後に、$Mg \approx 0.098\lambda < 0.225\lambda \approx T$ であるから、切れた直後の正味の上向きの力 $T - Mg$ は正であり、四面体は確かに浮き上がる。これは問題の設定と矛盾しない。

検算

- $a = 1$ として四つの頂点を座標で置き、六本の辺がすべて長さ 2 で、四つの頂点がすべて重心から $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.2247$ の距離にあることを確かめ、$T \approx 0.2247\lambda$ を再び得た。
- $Mg/\lambda = 6\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} - 9 \approx 0.09765$ として、運動方程式 $M\ddot{z} = 3T(L)\,\frac{r-z}{L} - Mg$ を $z = 0$ での静止状態から数値的に追跡した。速度が初めて零に戻るのは $z \approx 0.40825$ においてであり、これは $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$ と一致する。

よくある間違い

- R を重心から面までの距離と取り違えること。重心は頂点から測って $\frac{3}{4}$ 下った位置にあるので、$R = 3r$ である。
- 最高点でも糸がまだ伸びていることを忘れること。そこでの各糸のエネルギーは零ではなく $\frac{\lambda(\rho-a)^2}{2a}$ である。
- 伸び $L-a$ の L を、O から頂点までではなく、O から面の中心 N までの長さで測ってしまうこと。

STEP のその先へ

ここで用いた重心の工夫（六本の棒の中点の平均が四つの頂点の平均に等しいこと）は、「系の質量中心は各部分の質量中心を質量で重み付けした平均である」という一般的な事実の小さな例である。運動を純粋な並進として扱えたのは対称性の議論によるが、こうした議論は剛体（rigid body）の力学において体系化され、そこでは物体の運動は質量中心の並進とそのまわりの回転とに分解される。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これら二つの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。