解答例

STEP I 1989、第 11 問

力学 ・ 到達距離の最適化

> **STEP I 1989、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q11

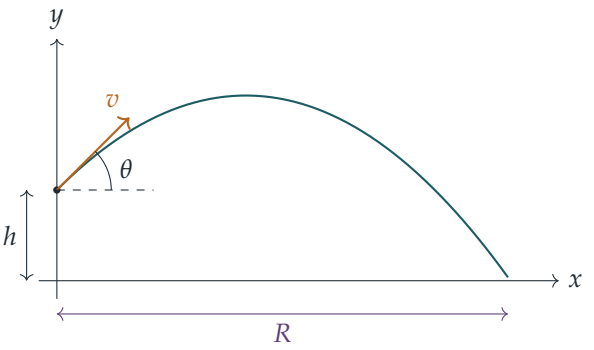
鍵となる考え方

飛行時間（time of flight）は t についての二次方程式（quadratic equation）から求まる。砲丸は高さが再び 0 に戻ったときに着地するからである。正の解をとって水平方向の速さを掛ければ R が得られ、あとは平方根を求められた形に整理するだけである。後半の「θ を少し小さくすると R は増えるか」という問いは、$\theta = 45^\circ$ における $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta$ の符号についての問いであり、$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ という対称性のおかげで、この導関数（derivative）は非常にすっきりと簡単になる。

解答

モデル

砲丸を、重力のみを受けて運動する質点（particle）とみなす。砲丸は点 $(0, h)$ から、水平より角 θ 上向きに速さ v で投げ出される。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$、$h > 0$ とする。投げる向きに水平に x 軸を、地面から鉛直上向きに y 軸をとる。



到達距離

時刻 t において

$$x = vt\cos\theta, \qquad y = h + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

砲丸が地面に落ちるのは $y = 0$ のとき、すなわち

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v\sin\theta)\,t - h = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{v\sin\theta \pm \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}.$$

のときである。$h > 0$ より二つの解の積 $-2h/g$ は負であるから、正の解はちょうど一つである。マイナスの符号は負の解（投げ出す前の時刻）を与えるので、プラスの符号をとる。すると

$$\begin{aligned} R = v\cos\theta\, t &= \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}\right) \\ &= \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2\sin^2\theta}}\right) \qquad (v\sin\theta > 0 \text{ をくくり出す}) \\ &= \frac{v^2}{2g}\sin 2\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2\sin^2\theta}}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を用いた。これが求める結果である。

考えてみよう $v\sin\theta$ を $v^2\sin^2\theta$ として平方根の中に入れてよいのはなぜか。

$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ が成り立つのは $a \geq 0$ のときに限るからである。ここでは $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $v\sin\theta > 0$ であり、この変形は正しい。（下向きに投げる場合にはこれが成り立たず、与えられた式は誤りとなる。）

45° は最適な角度か

微分するには、整理する前の形のほうが扱いやすい。

$$R(\theta) = \frac{v}{g}\cos\theta\left(v\sin\theta + S\right), \qquad S = \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh},$$

とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}$ である。積の微分法則（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{g}\left[-\sin\theta\left(v\sin\theta + S\right) + \cos\theta\left(v\cos\theta + \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}\right)\right].$$

$\theta = 45^\circ$ において $\sin\theta = \cos\theta = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおく。項 $-vc^2$ と $+vc^2$ が打ち消し合い、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=45^\circ} &= \frac{vc}{g}\left(-S + \frac{v^2c^2}{S}\right) = \frac{vc}{gS}\left(v^2c^2 - S^2\right)\\ &= \frac{vc}{gS}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v^2 - 2gh\right) = -\frac{2vhc}{S} = -\frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}},\end{aligned}$$

が残る。ただし最後の段階で $S = \sqrt{\frac{1}{2}v^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2+4gh}$ を用いた。

$v > 0$ かつ $h > 0$ であるから、この導関数は真に負である。よって R は 45° の付近で θ の狭義単調減少関数（strictly decreasing function）であり、十分小さな減少量 $\delta\theta > 0$ に対して $R(45^\circ - \delta\theta) \approx R(45^\circ) + \frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}}\,\delta\theta > R(45^\circ)$ が成り立つ。**答えは「はい」である。θ を少し小さくすると R は増加する。**

物理的に言えば、高い位置から投げ出された砲丸は、水平な地面から投げた場合よりも少し長く空中にとどまる。その余分な時間は水平方向に進むことに使ったほうが得であり、そのため低めの角度で投げたほうが有利になる。$h = 0$ のときに限って導関数が 0 となり、45° が最適となる。

検算

- $h = 0$ とすると、式は $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ となり、おなじみの水平な地面での到達距離（range）に一致する。また 45° での導関数は 0 となり、そうなるべきとおりである。
- 単位：v^2/g は長さであり、$2hg/v^2$ は無次元（dimensionless）である。
- 数値例として $g = 9.8$、$v = 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$h = 2\,\mathrm{m}$ とすると、$R(45^\circ) \approx 19.05\,\mathrm{m}$ であるのに対し $R(40^\circ) \approx 19.10\,\mathrm{m}$ となる。運動を時間について少しずつ進めて計算すると R の式が再現され、また 45° における差分（finite difference）による導関数の近似値は、多数のランダムな v と h について $-\sqrt{2}\,vh/\sqrt{v^2+4gh}$ と一致する。

よくある間違い

- t についての二次方程式で誤った解をとる、あるいは負の解を捨てる理由を述べ忘れる。
- 「$\sin 2\theta$ は 45° で最大となるから、R も 45° で最大となる」と推論する。括弧の部分も θ に依存する（θ が増えると**減少する**）ので、この議論は不完全である。

STEP のその先へ

一般に $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta = 0$ とおくと、高さ h から投げる場合の最適な角度は $\tan\theta = v/\sqrt{v^2+2gh}$ を満たすことがわかる。これは 45° より少し小さい（上の数値例ではおよそ 42°）。実際の砲丸投げの選手はさらに低い角度で投げる。低い角度のほうが強く押し出せるからである。このように軌道の族全体について最適化を行うと、その族の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）にたどり着く。これは砲丸が到達しうるすべての点の範囲を示す曲線である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とその様々な変形を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。