解答例

STEP I 1989、第 10 問

力学 ・ 速度に依存する抵抗

> **STEP I 1989、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q10

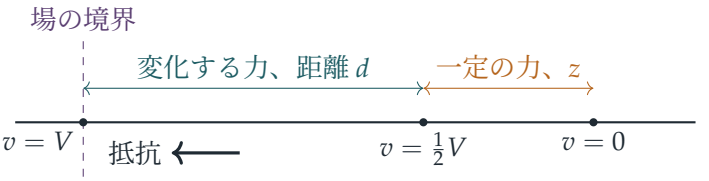
鍵となる考え方

抵抗（resistance）は時間ではなく速さ v に依存し、求めたいのは**距離**である。これは加速度を $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くべきだという合図であり、そうすることでニュートンの第二法則（Newton's second law）は v と x を直接結びつける変数分離形（separable）の微分方程式になる。後半は減速度が一定の問題なので、やるべきことは切り替わる瞬間の力を求め、それを $\pm 10\%$ の範囲で変化させることだけである。

解答

モデル

宇宙船を、直線上を運動する質量 M の質点（particle）として扱う。場に入ってからの移動距離を x、速さを v とし、$x = 0$ で $v = V$ とする。働く力は抵抗のみで、これは後ろ向きに働くので、速さは常に減少する。



速さが半分になるまでの距離

運動の向きを正とし、加速度を $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと、ニュートンの第二法則より

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{M\omega\,(v^2+V^2)}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = -\omega\,\mathrm{d}x.$$

? **考えてみよう** $\dfrac{v^2}{v^2+V^2}$ はどのように積分すればよいか。

分子を $(v^2+V^2)-V^2$ と書き直すと

$$\frac{v^2}{v^2+V^2} = 1 - \frac{V^2}{v^2+V^2}, \qquad \int \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = v - V\arctan\frac{v}{V} + C,$$

となる。ここで標準的な積分 $\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+V^2} = \frac{1}{V}\arctan\frac{v}{V}$ を用いた。

速さが $\frac{1}{2}V$ まで落ちたときの移動距離を d とする。$(x,v)=(0,V)$ から $(d,\frac{1}{2}V)$ まで積分すると

$$\begin{aligned}\omega d &= \int_{V/2}^{V} \frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v = \Big[v - V\arctan\frac{v}{V}\Big]_{V/2}^{V} \\ &= \frac{V}{2} - V\Big(\arctan 1 - \arctan\tfrac{1}{2}\Big) = V\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

よって求める距離は

$$d = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{2}\Big) = \frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3}\Big) \approx 0.178\,\frac{V}{\omega}.$$

2 つ目の形は、正接の減法定理から得られる $\arctan 1 - \arctan\frac{1}{2} = \arctan\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \arctan\frac{1}{3}$ を用いたものである（どちらの角も $(0,\frac{\pi}{2})$ にあるので、あいまいさはない）。どちらの形でも完全な答えである。

一定の力

切り替わる直前には $v=\frac{1}{2}V$ なので、抵抗力の大きさは

$$\frac{M\omega(\frac{1}{4}V^2+V^2)}{\frac{1}{2}V} = \frac{5}{2}M\omega V.$$

新しい一定の力 F はこの値との差が 10% 以内なので

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V \le F \le \frac{11}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{9}{4}M\omega V \le F \le \frac{11}{4}M\omega V.$$

力が一定なら減速度 $a = F/M$ も一定なので、$u=\frac{1}{2}V$、終わりの速さ 0 として $v^2 = u^2 - 2as$ を用いると

$$z = \frac{(V/2)^2}{2a} = \frac{MV^2}{8F}.$$

これは F が増加すると減少するので、最大の力が最小の z を与え、逆も同様である。

$$\frac{MV^2}{8\cdot\frac{11}{4}M\omega V}\le z\le\frac{MV^2}{8\cdot\frac{9}{4}M\omega V},\qquad \text{つまり}\qquad \boxed{\frac{V}{22\,\omega}\le z\le\frac{V}{18\,\omega}}$$

（「10% 以内」を厳密な意味に読むなら、不等号は等号なしになる。）力がまったく変わらなければ $z=V/(20\omega)$ であり、これはこの範囲のちょうど中央にある。

検算

- 次元（dimensions）：$M\omega v$ は力でなければならないので ω の単位は s^{-1} であり、したがって V/ω は長さである。どちらの答えもそうなっている必要がある。
- 係数 $\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{3}\approx 0.1782$ は正で $\frac{1}{2}$ より小さい。そうなるはずである。宇宙船は $\frac{1}{2}V$ から V の間の速さで進み、減速度は少なくとも $2\omega V$ なので、この区間にかかる時間は高々 $1/(4\omega)$ であり、進む距離は $V/(4\omega)$ より小さい。
- $V=\omega=1$ として $\dot v=-\omega(v^2+V^2)/v$ を数値的に刻んで計算すると、$v=\frac{1}{2}$ となる距離は 0.17825 となり、一定の力の段階を同様に計算すると、力が 110%、100%、90% のとき $z=0.0455$、0.0500、0.0556 となって、$\frac{1}{22},\frac{1}{20},\frac{1}{18}$ と一致する。

よくある間違い

- $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ の代わりに $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を使うこと。これでは距離ではなく時間が得られ、さらにもう一度積分が必要になる。
- 上下の限界を逆に対応させること。**大きい**力ほど停止距離は**短く**なるので、力の 1.1 倍は下限 $V/(22\omega)$ に対応する。

STEP のその先へ

$a=v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書くことは、より大きな考え方への入り口である。位置または速さだけに依存する 1 次元の力に対しては、時間を別の変数に取り替えて方程式の階数を下げることができ、力が位置だけに依存する場合には、これがエネルギー保存（energy conservation）や運動の相平面（phase plane）による描像につながる。後半は**感度**（sensitivity）についての小さな演習である。すなわち、データの不確かさ（ここでは力の ±10%）が答えにどう伝わるか（z ではおよそ ∓10%）を見ている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、速度に依存する力をこうした観点から扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。