解答例

STEP I 1989、第 1 問

純粋数学 ・ 複合図形の面積

> **STEP I 1989、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q1

鍵となる考え方

この領域は半円（semicircle）からできている。大きな半円板（half-disc）を一つ用意し、そこから小さな半円板を取り除いたり加えたりすれば得られる。したがって必要なのはそれぞれの半径であり、特に下側の半円 CDE の半径である。これは直線 AG に沿った長さから求まる。放物線（parabola）に変えても方法は変わらない。放物線のアーチには簡単な面積公式があり、それが $\frac{1}{2}\pi a^2$ の役割を果たすからである。

解答

半円の場合

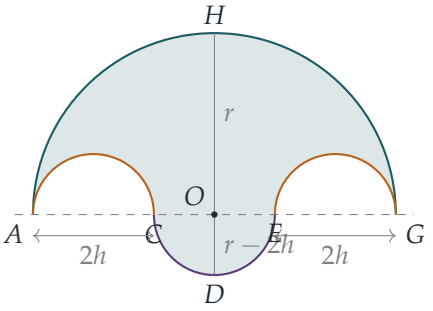
A から直線に沿って長さを測る。ABC の半径は h なので $AC = 2h$ である。同様に $EG = 2h$ であり、AHG の半径は r なので $AG = 2r$ である。よって

$$CE = 2r - 4h,$$

であり、$2h < r$ であるから、これは正である。よって半円 CDE の半径は $r - 2h$ である。その中心は CE の中点であり、対称性によりこれは AG の中点でもある。したがって、この半円は大きな半円と中心 O を共有する。

図より、ABC と EFG は AG に関して H と同じ側、すなわち大きな半円の内側にあり、CDE は反対側にある。したがって、囲まれた領域は次のようになる。

$$(\text{半円板}AHG) - (\text{半円板}ABC\text{ と}EFG) + (\text{半円板}CDE).$$



半径 a の半円板の面積は $\frac{1}{2}\pi a^2$ であるから、囲まれた面積は次のようになる。

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi r^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \tfrac{1}{2}\pi(r-2h)^2 &= \tfrac{1}{2}\pi(r^2 - 2h^2 + r^2 - 4rh + 4h^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \pi(r-h)^2.\end{aligned}$$

? 考えてみよう HD の長さはいくらか？

点 H は大きな半円の頂点なので、O を通り AG に垂直な直線上にあり、O からの距離は r である。点 D は CDE の最下点なので、同じ垂線上で直線の反対側にあり、O からの距離は $r-2h$ である。よって

$$HD = r + (r-2h) = 2(r-h),$$

であり、HD を直径とする円の半径は $r-h$、面積は $\pi(r-h)^2$ である。これは先に求めた面積に一致し、示すべきことが示された。

放物線の場合

半径 a の各半円を、長さ $2a$ の同じ弦（chord）の上に立つ放物線のアーチで置き換える。その頂点は弦の中点から高さ a の位置にある。弦の中点を原点とする。放物線は頂点を通る軸に関して対称なので、$y = a - kx^2$ の形をしている。これは $(\pm a, 0)$ を通るので $k = 1/a$ である。アーチと弦の間の面積は

$$\int_{-a}^{a}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x = 2a^2 - \frac{2a^3}{3a} = \frac{4a^2}{3}.$$

である。（これはアルキメデス（Archimedes）の結果であり、外接する長方形の面積の 3 分の 2、すなわち $\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot a$ に等しい。）

どのアーチも、もとの半円と同じく AG の同じ側にある。また、小さなアーチがそれぞれ大きなアーチの下にあることも確かめておくべきである。どちらのアーチも傾き

2 で A から出発するので、A の近くではこれは自明ではない。A からの距離が x（ただし $0 \le x \le 2h$）の位置で、大きなアーチの高さは $x(2r-x)/r$、アーチ ABC の高さは $x(2h-x)/h$ である。その差は

$$\frac{x(2r-x)}{r} - \frac{x(2h-x)}{h} = x^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r}\right) \ge 0,$$

となるので、ABC は確かに AHG の内側にあり、対称性により EFG も同様である。したがって、$\frac{4}{3}a^2$ を $\frac{1}{2}\pi a^2$ の代わりに用いれば、同じ足し引きによる分解がそのまま使える。

$$\begin{aligned}\tfrac{4}{3}r^2 - 2\cdot\tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}(r-2h)^2 &= \tfrac{4}{3}(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \tfrac{8}{3}(r-h)^2.\end{aligned}$$

よって、放物線の場合に囲まれる面積は $\frac{8}{3}(r-h)^2$ である。

検算

- どちらの答えも $(r-h)^2$ の定数倍である。これは必然である。二つの計算はまったく同じ構造をもち、変わるのはアーチ一つ分の係数だけで、それが $\frac{\pi}{2}$ から $\frac{4}{3}$ に変わるにすぎないからである。比 $\frac{8/3}{\pi} \approx 0.849$ は 1 より小さいが、これは当然である。同じ弦と高さをもつ放物線のアーチは半円の内側にあるからである。
- 極限の場合 $h \to 0$：小さなアーチは消え、CDE は半径 r の完全な下側の半円となり、面積 πr^2 の円板全体が得られる。公式 $\pi(r-h)^2$ もこれと一致する。
- 数値的には、$r = 3$、$h = 1$（試験問題の図の比率）とすると、面積は $4\pi \approx 12.566$ と $\frac{32}{3} \approx 10.667$ である。ランダムに選んだ 8 組の (r,h) について、境界をたどって靴ひも公式（shoelace formula）で計算したところ、どちらの公式とも離散化誤差の範囲内で一致した。

よくある間違い

- CDE の半径を $r-h$ や $r-4h$ としてしまう。AG に沿った長さを図に書き込むこと。$CE = 2r - 4h$ であるから、半径は $r-2h$ である。
- 上側の小さな半円を引くべきところで足してしまう。これらは大きな半円板を削り取るので、その面積は差し引かれる。

STEP のその先へ

前半の図形は**アルベロス**（arbelos、「靴職人のナイフ」）と呼ばれ、アルキメデスが研究した図形である。その古典的な形は、大きな半円の内側に二つの小さな半円を置いたもので、その面積もうまく選んだ弦を直径とする円の面積に等しい。アルキメデスは放物線の切片に対する $\frac{2}{3}$ の法則も発見した。それは積分（integration）にかなり近い極限の議論によるものであった。大学では、彼の「取り尽くし法」（method of exhaustion）からリーマン（Riemann）積分への歩みが、最初の解析学（analysis）の講義の中心的な部分となる。これを学ぶのによい本は Abbott, *Understanding Analysis* である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。