解答例

STEP III 1988、第 8 問

純粋数学 • 放物線の接線と法線

> **STEP III 1988、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q8

鍵となる考え方

パラメータ（parameter）t を用いてすべての直線を表し、2 直線ずつの交点を求め、それらの頂点を行列式（determinant）に代入する。行列式は複雑に見えるが、t_1, t_2, t_3 について交代的（antisymmetric）であるから、いずれも $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ の倍数でなければならない。簡単な行基本変形と列基本変形によってこの因数をくくり出すと、2 つの面積の比較が残る。

（問題文では A_3 を求めるよう書かれているが、これは法線三角形の面積 A_2 の誤植である。）

解答

接線と法線

$x = at^2, y = 2at$ に沿って $y^2 = 4ax$ を t で微分すると、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ を得る。点 $(at^2, 2at)$ における接線（tangent）は $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$、すなわち

$$ty = x + at^2.$$

である。この形は $t = 0$ のときも成り立つ（頂点における接線は $x = 0$ である）。法線（normal）の傾きは $-t$ であるから、

$$y + tx = 2at + at^3.$$

以下、常に $a \neq 0$ と仮定する。

接線三角形

t_i と t_j における接線の方程式を辺々引くと $(t_i - t_j)y = a(t_i^2 - t_j^2)$ を得る。$t_i \neq t_j$ であるから両辺を割ることができ、$y = a(t_i + t_j)$、さらに $x = t_i y - at_i^2 = at_i t_j$ となる。よって

$$\text{パラメータ} t_i, t_j \text{ における接線の交点は} (at_i t_j,\ a(t_i + t_j)).$$

接線の傾き $1/t_i$ は互いに異なる（あるいは 1 本が鉛直である）ので、どの 2 本も平行でなく、三角形が存在する。$s = t_1 + t_2 + t_3$ とおく。P_1 に向かい合う頂点は $(at_2t_3,\ a(s - t_1))$ であり、他の頂点も同様である。第 1 列と第 2 列から因数 a をくくり出し、次に第 3 列の $-s$ 倍を第 2 列に加え、さらに第 2 列の符号を反転すると、

$$\det \begin{pmatrix} at_2t_3 & a(s-t_1) & 1 \\ at_1t_3 & a(s-t_2) & 1 \\ at_1t_2 & a(s-t_3) & 1 \end{pmatrix} = -a^2 \det \begin{pmatrix} t_2t_3 & t_1 & 1 \\ t_1t_3 & t_2 & 1 \\ t_1t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} = a^2 D,$$

となる。ここで第 1 列と第 2 列を入れ替え、

$$D = \det \begin{pmatrix} t_1 & t_2t_3 & 1 \\ t_2 & t_1t_3 & 1 \\ t_3 & t_1t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

とおいた。D を計算するため、第 1 行を第 1 行 − 第 2 行に、第 2 行を第 2 行 − 第 3 行に置き換える。第 1 行は $(t_1 - t_2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(1,\ -t_3,\ 0)$ となり、第 2 行は $(t_2 - t_3)(1,\ -t_1,\ 0)$ となる。最後の列に沿って展開すると、

$$D = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3) \det \begin{pmatrix} 1 & -t_3 \\ 1 & -t_1 \end{pmatrix} = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1).$$

したがって

$$A_1 = \tfrac{1}{2} a^2 \,|(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|,$$

であり、t_i は相異なるので、これは 0 でない。

法線三角形

t_i と t_j における法線の方程式を辺々引くと $(t_i - t_j)x = 2a(t_i - t_j) + a(t_i^3 - t_j^3)$ を得るので、$t_i - t_j \neq 0$ で割って

$$x = 2a + a(t_i^2 + t_i t_j + t_j^2), \qquad y = 2at_i + at_i^3 - t_i x = -at_i t_j (t_i + t_j).$$

となる。法線の傾き $-t_i$ は互いに異なるので、やはりどの 2 本も交わる。P_1 に向かい合う頂点については、$t_2 + t_3 = s - t_1$ を用い、$e_1 = t_2t_3$（および $e_2 = t_1t_3, e_3 = t_1t_2$）とおく。すると

$$t_2^2 + t_2t_3 + t_3^2 = (t_2 + t_3)^2 - t_2t_3 = (s - t_1)^2 - e_1, \qquad -t_2t_3(t_2 + t_3) = -se_1 + p,$$

となる。ここで $p = t_1t_2t_3$ である。よってこの頂点は $a(2 + (s - t_1)^2 - e_1,\ -se_1 + p)$ であり、他の頂点も同様である。ここで a^2 をくくり出し、行列式の値を変えない列基本変形を行う。すなわち第 1 列から第 3 列の 2 倍を引き、第 2 列から第 3 列の p 倍を引き、さらに第 2 列から因数 $-s$ をくくり出す。

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\det(\text{法線三角形の頂点}) &= \det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & -se_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3}\\ &= -s\det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2 - e_i & e_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3},\end{aligned}$$

ここで各式は典型的な第 i 行を示している。次に第 2 列を第 1 列に加えると $-e_i$ が消え、さらに $(s - t_i)^2 = s^2 - 2st_i + t_i^2$ と展開する。s^2 は第 3 列の倍数なので取り除くことができ、また行列式は第 1 列について線形である。

$$\det\begin{pmatrix}t_i^2 - 2st_i & e_i & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t_i^2 & e_i & 1\end{pmatrix} - 2s\det\begin{pmatrix}t_i & e_i & 1\end{pmatrix} = E - 2sD,$$

とおく。2 つ目の行列式はちょうど D である。

考えてみよう 行が $(t_i^2,\ e_i,\ 1)$ である行列式 E は、どのように計算すればよいか？

D のときと同じ行基本変形を用いる。第 1 行 − 第 2 行は $(t_1^2 - t_2^2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2,\ -t_3,\ 0)$ であり、第 2 行 − 第 3 行は $(t_2 - t_3)(t_2 + t_3,\ -t_1,\ 0)$ である。よって

$$\begin{aligned}E &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[-t_1(t_1 + t_2) + t_3(t_2 + t_3)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[(t_3^2 - t_1^2) + t_2(t_3 - t_1)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 + t_3) = sD.\end{aligned}$$

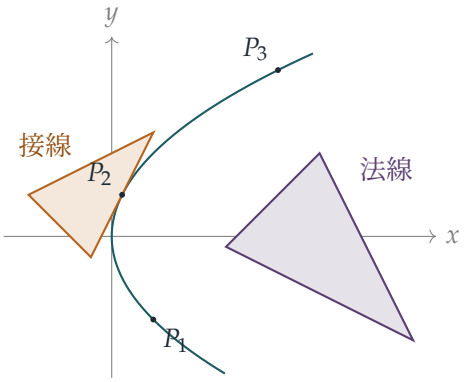
以上をまとめると、

$$\det(\text{法線三角形の頂点}) = a^2 \cdot (-s)\,(sD - 2sD) = a^2s^2D.$$

絶対値の半分をとり、$A_1 = \frac{1}{2}a^2|D|$ と比較すると、

$$A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2A_1,$$

となり、求める結果が得られた。



図では $a=1$、$t_1,t_2,t_3=-1,\frac{1}{2},2$ としており、$s=\frac{3}{2}$ である。接線三角形（琥珀色）の面積は $\frac{27}{8}$ であり、法線三角形（紫色）の面積は $\frac{243}{32}=(\frac{3}{2})^2\cdot\frac{27}{8}$ である。

法線が 1 点で交わるのはどのようなときか？

どの 2 本の法線も平行でないので、法線は 2 本ずつ 3 点 Q_{12},Q_{13},Q_{23} で交わる。法線が 1 点で交わる（共点である、concurrent）ならば、これらの点は一致し、三角形の面積は 0 となる。逆に、面積は 0 であるがこれらの点がすべて一致するわけではないと仮定し、たとえば $Q_{12}\neq Q_{13}$ とする。両点とも P_1 における法線上にあるので、それらを通る直線はこの法線である。3 点は同一直線上にある（collinear）ので、Q_{23} も P_1 における法線上にある。すると Q_{23} は 3 本の法線すべての上にあるから、$Q_{23}=Q_{12}$（P_1 と P_2 における法線の唯一の共有点）であり、同様に $Q_{23}=Q_{13}$ となって矛盾する。よって

$$\text{法線が 1 点で交わる} \iff A_2=0 \iff (t_1+t_2+t_3)^2A_1=0 \iff t_1+t_2+t_3=0,$$

ここで t_i が相異なることから $A_1\neq 0$ であることを用いた。求める条件は $t_1+t_2+t_3=0$ である。

検算

- $t_1,t_2,t_3=0,1,2$、$a=1$ のとき、接線三角形の頂点は $(2,3),(0,2),(0,1)$ であり、面積は 1 となる。また $\frac{1}{2}|D|=\frac{1}{2}|(-1)(-1)(2)|=1$ である。
- $t=1,2,-3$（和は 0、$a=1$）における法線はすべて $(9,-6)$ を通る。たとえば $t=1$ における法線は $y+x=3$ である。
- a と相異なる t_i を無作為に選んだ約 2,800 通りについて、コンピュータで分数を用いて頂点を厳密に計算したところ、毎回 $A_2=(t_1+t_2+t_3)^2A_1$ が確認された。

よくある間違い

- 3 本の直線が実際に三角形をなすことの根拠を示し忘れる。必要なのはどの 2 本も平行でないことであり、ここでは傾きが互いに異なることから従う。
- 理由を示さずに $A_2 = 0$ から 3 本が 1 点で交わると結論づける。面積が 0 であることは 3 つの交点が同一直線上にあることしか意味せず、上の短い議論によってこれを「一致する」にまで強めている。
- 3×3 の行列式をすべて展開してしまう。それも可能ではあるが、符号の誤りはほぼ避けられない。まず行基本変形で $(t_i - t_j)$ をくくり出すべきである。

STEP のその先へ

因数 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ はヴァンデルモンド行列式（Vandermonde determinant）であり、$E = sD$ に現れるもう一方の因数 $t_1 + t_2 + t_3$ は対称式（symmetric polynomial）である。任意の交代式はヴァンデルモンド積と対称式の積で表され、この事実は行列式や対称関数の理論で繰り返し現れる。法線のなす三角形は放物線の**縮閉線**（evolute）と関係がある。縮閉線とは曲率中心が描く曲線であり、法線の包絡線（envelope）でもある。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、行列式とその行基本変形をよく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。