解答例

STEP III 1988、第 6 問

純粋数学 ・ 繰り返し微分

STEP III 1988、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q6

鍵となる考え方

積を直接 1988 回微分するのは絶望的であるが、正弦と余弦の積は和に書き換えられる。そうすれば各項 $\sin kx$ は 4 段階の周期で微分され、そのたびに因子 k がかかる。零点については、$\sin 3x$ の前に付く巨大な因子 3^{1988} のために、導関数（derivative）が 0 になりうるのは $\sin 3x$ がほぼ零となるところだけである。そこで $\sin 3x$ の最初の零点のすぐ先を調べ、線形化（linearise）する。

解答

1988 階導関数

積和公式（product-to-sum formula）$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ により、

$$\mathrm{f}(x) = \sin 2x \cos x = \tfrac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right).$$

$\sin kx$ を 4 回微分すると

$$\sin kx \;\to\; k\cos kx \;\to\; -k^2 \sin kx \;\to\; -k^3 \cos kx \;\to\; k^4 \sin kx,$$

となるので、4 回微分するごとに $\sin kx$ は単に k^4 倍される。（同じことであるが、$\sin kx$ の n 階導関数は $k^n \sin\left(kx + \frac{1}{2}n\pi\right)$ である。）$1988 = 4 \times 497$ であるから、

$$\mathrm{f}^{(1988)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(3^{1988}\sin 3x + \sin x\right).$$

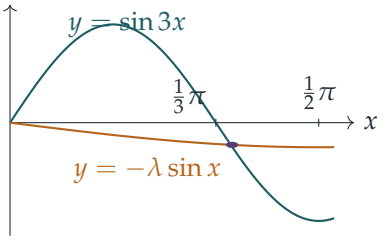
最小の正の零点

次を満たす最小の $x > 0$ を求めればよい。

$$3^{1988} \sin 3x + \sin x = 0. \qquad (*)$$

$(0, \frac{1}{3}\pi]$ に零点はない。 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ のとき $0 < 3x < \pi$ であるから、$\sin 3x$ と $\sin x$ はともに正であり、$(*)$ の左辺は正である。$x = \frac{1}{3}\pi$ では左辺は $0 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ に等しい。

$\frac{1}{3}\pi$ のすぐ後に零点がある。 $x = \frac{1}{2}\pi$ では左辺は $3^{1988} \sin \frac{3}{2}\pi + 1 = 1 - 3^{1988} < 0$ である。左辺は連続であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に零点が存在し、最小の正の零点はそれらのうち最初のものである。これを $x = \frac{1}{3}\pi + \epsilon$（ただし $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\pi$）と書く。



この図は $(*)$ を $\sin 3x = -\lambda \sin x$（ただし $\lambda = 3^{-1988}$）として表したものである（実際よりはるかに大きく描いてある）。2 つの曲線は、$\sin 3x$ が $\frac{1}{3}\pi$ で零を横切った直後に初めて交わる。実際のごく小さな λ では、交点はほとんど $\frac{1}{3}\pi$ の上まで押し寄せられる。

$\sin(\pi + 3\epsilon) = -\sin 3\epsilon$ であるから、方程式 $(*)$ は次のようになる。

$$3^{1988} \sin 3\epsilon = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi + \epsilon\right). \qquad (**)$$

考えてみよう $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$ を使ってよいほど ϵ が小さいことは、どうすればわかるか。

$(**)$ の右辺は高々 1 であるから、$\sin 3\epsilon \le 3^{-1988}$ である。$0 < 3\epsilon < \frac{1}{2}\pi$ であり、$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$（そこでは正弦曲線は弦より上にある）が成り立つので、$3\epsilon \le \frac{\pi}{2} 3^{-1988}$ を得る。したがって ϵ は途方もなく小さく、これによって以下の近似が正当化される。

ϵ がこれほど小さいとき、$\sin 3\epsilon = 3\epsilon\,(1 + O(\epsilon^2))$ かつ $\sin(\frac{1}{3}\pi + \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\epsilon)$ である。これらを $(**)$ に代入すると、

$$3^{1989}\epsilon \approx \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \epsilon \approx \frac{3^{-1989}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^{-1988}\sqrt{3}}{2},$$

であり、相対誤差（relative error）は 3^{-1988} の程度である。

問題文に印刷された値について。 問題文は $\epsilon \approx \frac{1}{2}3^{-1988}\sqrt{3}$ を求めているが、これはここで得た値の 3 倍である。因子 3 は $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$ から生じるものであり、以下の数値的な検算も 3^{-1988} ではなく 3^{-1989} を裏づけている。したがって問題文には誤植があると思われる。意図されている方法はまさに上のものであり、3 の指数が 1 だけずれているにすぎない。3^{-1989} に到達したのなら、自分の計算を信じてよい。

検算

- 同じ議論は 4 の任意の倍数 n に対して成り立つ。$3^n \sin 3x + \sin x$ の最初の正の零点は $\frac{1}{3}\pi + \epsilon_n$ にあり、$\epsilon_n \approx \frac{1}{2}3^{-(n+1)}\sqrt{3}$ である。$n = 4$ の場合、数値的に解くと $\epsilon_4 = 3.5713 \times 10^{-3}$ となり、予測値 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^5 = 3.5640 \times 10^{-3}$ と比べて比は 1.0021 である。$n = 8$ では比は 1.000025 であり、$n = 40$ 以降では機械精度（machine precision）の範囲で 1 となる。$\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^n$ との比は $\frac{1}{3}$ に収束する。
- 導関数の公式は最初のいくつかの場合で確かめられる。$\mathrm{f}^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(81\sin 3x + \sin x)$ であり、これは $\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ を 4 回微分すれば確認できる。

よくある間違い

- 符号や位相を間違える。$\sin kx$ が $+k^n \sin kx$ に戻るのは、4 の倍数回微分したときだけである。
- $(0, \frac{1}{3}\pi)$ に零点がないことを示し忘れる。そこでの符号の議論こそが、$\frac{1}{3}\pi + \epsilon$ を**最小の**正の零点たらしめるのである。
- -3ϵ とすべきところを $\sin(\pi + 3\epsilon) \approx \epsilon$ と書き、符号か因子 3 のどちらかを失う。

STEP のその先へ

後半は**摂動論**（perturbation theory）の簡単な例である。大きなパラメータのために解は既知の根のごく近くに位置せざるをえず、その根のまわりで線形化すると主要な補正項が得られる。誤差の大きさはテイラー級数（Taylor series）の次の項によって制御される。「ほぼ等しい」ということを $O(\cdot)$ 記法と誤差評価によって厳密にすることは、最初に学ぶ解析学の講義の中心的なテーマである。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。