解答例

# STEP III 1988、第 5 問

純粋数学 ・ 漸化式とローン

> **STEP III 1988、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q5

## 鍵となる考え方

1 日のうちに負債がどう変化するかを書き出してみる。毎日、負債は $1+k$ 倍され（利子（interest））、その後で一定額が加えられる（掘削費用）か差し引かれる（収入）。$S_n = (1+k)S_{n-1} +$ 定数 という形の漸化式（recurrence）は、展開すると等比級数（geometric series）になる。最後の小問は結局、ひとつの比較に帰着する。すなわち、トンネルが開通した時点で、1 日の収入は負債にかかる利子より大きいか、という比較である。

## 解答

### トンネル掘削中の負債

利率 $100k\%$ とは、負債 $£S$ に対する 1 日の利子が $£kS$ であることを意味する。$S_n$ を第 $n$ 日の終わりにおける負債（単位はポンド）とし、$S_0 = 0$ とする。$n \le T$ である第 $n$ 日の終わりに、会社は掘削のために $c$ を、利子のために $kS_{n-1}$ を借りるので、

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-1} + c = (1+k)S_{n-1} + c.$$

$S_0 = 0$ から始めてこれを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} S_n &= c + (1+k)S_{n-1} \\ &= c + c(1+k) + (1+k)^2 S_{n-2} \\ &= \cdots = c[1 + (1+k) + (1+k)^2 + \cdots + (1+k)^{n-1}]. \end{aligned}$$

これは項数 $n$、公比（common ratio）$1+k \neq 1$（$k>0$ より）の等比級数であるから、

$$S_n = \frac{c[(1+k)^n - 1]}{k}, \qquad n \leq T,$$

となり、示すべき式が得られる。（念のため数学的帰納法（induction）で確かめておく。この式は $S_0 = 0$ を与え、また $S_{n-1}$ について成り立てば $(1+k)S_{n-1} + c = \frac{c}{k}[(1+k)^n - (1+k) + k]$ となり、これは $S_n$ の式である。）

### トンネル開通後の負債

第 $T+1$ 日以降はもう掘削を行わない。毎日、負債には利子 $kS$ が加わり、会社は $d$ を支払うので、負債が正である限り

$$S_{T+j} = (1+k)S_{T+j-1} - d.$$

これは $c$ を $-d$ に置き換えた先ほどと同じ漸化式であるが、今度は 0 からではなく $S_T$ から始まる。これを $m$ 回展開すると、

$$\begin{aligned} S_{T+m} &= (1+k)^m S_T - d[1 + (1+k) + \cdots + (1+k)^{m-1}] \\ &= (1+k)^m S_T - \frac{d[(1+k)^m - 1]}{k}. \end{aligned}$$

最初の小問で求めた $S_T$ を代入すると、

$$S_{T+m} = \frac{c[(1+k)^T - 1](1+k)^m - d[(1+k)^m - 1]}{k}.$$

この漸化式は負債をまだ返済している間しか成り立たないので、$S_{T+m} > 0$ が必要である。負債を完済する日には、会社は $d$ 全額ではなく残っている額だけを支払う。

### 負債を完済するのはいつか

$(1+k)^m$ を含む項をまとめると、

$$S_{T+m} = \frac{d}{k} - \frac{(1+k)^m}{k}\Big(d - c[(1+k)^T - 1]\Big).$$

**考えてみよう** 条件 $d/c > (1+k)^T - 1$ は、お金の言葉でいうと実際には何を意味しているのだろうか。

両辺に $c$ を掛けると、$d > c[(1+k)^T - 1] = kS_T$ となる。言い換えれば、最初の日の収入が、トンネル開通時の負債にかかる利子より大きいということである。したがって第 $T+1$ 日に負債は減り、それに伴って利子も減るので、負債はますます速く減り続ける。代数計算はこのことを厳密にするものである。

$d > c[(1+k)^T - 1]$ と仮定し、$\delta = d - c[(1+k)^T - 1] > 0$ とおく。すると

$$S_{T+m} = \frac{d - \delta(1+k)^m}{k}.$$

$1+k > 1$ であるから、$m \to \infty$ のとき $(1+k)^m \to \infty$ となり、$\delta(1+k)^m$ はいずれ $d$ を超える。この式は負債が正である間しか成り立たないので、いつまでも成り立ち続けることはできない。残りの負債がその日の利子を加えて $d$ 以下になる最初の日が存在し、その日に会社は負債を完済する。実際、負債は

$$(1+k)^m \geq \frac{d}{\delta}, \qquad \text{すなわち、} \qquad m \geq \frac{\ln(d/\delta)}{\ln(1+k)}.$$

を満たす最小の $m$ について、第 $T+m$ 日に完済される。よって、$d/c > (1+k)^T - 1$ ならば会社はいずれ負債を完済し、示すべきことが示された。

この条件は必要条件（necessary condition）でもある。$d \leq kS_T$ ならば $\delta \leq 0$ であり、$S_T = (d-\delta)/k$ であるから、すべての $m$ について

$$S_{T+m} - S_T = \frac{-\delta[(1+k)^m - 1]}{k} \geq 0$$

となる。負債は $S_T$ を下回ることがないので、決して完済されない。

## 検算

- $n = 1$ とおくと $S_1 = c$ となる。第 1 日には何も借りていないので利子は発生せず、これは正しい。
- $S_{T+m}$ の式に $m = 0$ を代入すると、当然そうあるべきとおり $S_T$ が得られる。
- $d = kS_T$ がちょうど成り立つならば、$\delta = 0$ であり、すべての $m$ について $S_{T+m} = d/k = S_T$ となる。収入がちょうど利子をまかなうだけで、負債はまったく変化しない。これが境界の場合である。
- $c = 100$、$k = 0.01$、$T = 30$ として 1 日ずつシミュレーションすると $S_T \approx 3478.49$ となり、公式と一致する。閾値は $d > 34.78$ である。$d = 50$ のとき、負債は $m = 120$ 日後に完済され、$\ln(50/15.22) / \ln 1.01 \approx 119.6$ と合致する。

## よくある間違い

- 第 1 日に利子を課してしまう、あるいは級数の項を $n+1$ 個数えてしまう。$S_0 = 0$ のとき、最初の日の費用はちょうど $c$ である。
- 第 $T$ 日以降の級数が 0 からではなく $S_T$ から始まることを忘れる。項 $(1+k)^m S_T$ は落としやすい。

▶「$d$ が $c$ より大きい」から負債を完済できる、と言ってしまう。重要なのは、$d$ と開通時の利子 $kS_T$ との比較である。

## STEP のその先へ

漸化式 $S_n = aS_{n-1} + b$ は、最も単純な**線形 1 階差分方程式**（*linear first-order difference equation*）である。その解は不動点（fixed point）$b/(1-a)$ に $a^n$ の定数倍を加えたものであり、これはまさに今回の公式の形、すなわち $d/k$ に $(1+k)^m$ の定数倍を加えた形になっている。その定数倍が正か負かによって、負債が増え続けるか返済されるかが決まる。この考え方は、不動点の安定性（stability）や線形常微分方程式（linear ODE）においても再び現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は差分方程式を微分方程式と並べて扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には漸化式に関する STEP の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。