解答例

STEP III 1988、第 4 問

純粋数学 ・ 弧長の最適化

STEP III 1988、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q4

鍵となる考え方

道路の全長を関数 $L(b)$ として表し、微分する。鉛直面内にある二つの区間は地表に沿って通らなければならないので、その長さは放物線（parabola）の弧長（arc length）である。半円の長さは πb である。弧長を表す積分をその下端について微分するのに積分計算はまったく必要なく、$L'(b)$ の符号によってすべてが決まる。

（問題文に印刷された断面の式では左辺が $x=$ となっているが、もちろん $z=$ と読むべきである。）

解答

長さを立式する

軸からの距離が b の地点における丘の高さを $h(b)=(a^2-b^2)/(2a)$ とおく。道路は地面の上になければならないので、(x,z) 平面内で $(-R,0)$ から $(-b,h(b))$ に至る経路は一通りしかない。すなわち、$x=-R$ から $x=-a$ までは平らな平面上を通り、続いて $x=-a$ から $x=-b$ まで放物線を登る。区間 (iii) はこれを鏡映したものである。

丘の上では $z=(a^2-x^2)/(2a)$ であるから $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{a}$ となり、$x=b$ から $x=a$ までの弧長は

$$\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

である。半円 (ii) は高さ $h(b)$ にある水平な半径 b の半円である（$(\pm b,h(b))$ を通る丘の緯線にあたる）から、その長さは πb である。したがって

$$L(b)=2(R-a)+2\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x+\pi b,\qquad 0\le b\le a.$$

この式は $b = 0$ の場合（半円がなく、道路は頂上をまっすぐ越える）や $b = a$ の場合（道路は丘のふもとを回る）も含んでいる。

最小化する

微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、下端について微分すると、その点での被積分関数にマイナスを付けたものが得られる：

$$L'(b) = \pi - 2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

考えてみよう 停留点（stationary point）はどこにあるか。そしてそれは許される範囲にあるか。

$L'(b) = 0$ となるには $1 + b^2/a^2 = \pi^2/4$、すなわち $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4} \approx 1.21a$ でなければならない。これは a より大きいので、許される範囲 $0 \le b \le a$ の外にある。実際、$0 \le b \le a$ に対して

$$2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \le 2\sqrt{2} \approx 2.83 < \pi,$$

が成り立つので、区間全体で $L'(b) > 0$ である。L は狭義単調増加であり、最小値は左端点 $b = 0$ でとる。

助言： $b = 0$ とせよ。道路は丘の一方の側をまっすぐ登り、反対側をまっすぐ下るべきであり、半円の回り道をする必要はない。

どれだけ短くなるか

参考までに、原始関数（antiderivative）は

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{a}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C,$$

である（$x = a\sinh t$ と置換する）。よって

$$L(0) = 2(R - a) + a(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 2(R - a) + 2.296a,$$

一方、ふもとを回ると $L(a) = 2(R - a) + \pi a \approx 2(R - a) + 3.142a$ となる。頂上を越えれば約 $0.85a$ 短くなる。

検算

- 答えは R によらない。当然そうあるべきである。平らな区間の長さの合計は、b がいくつであっても $2(R - a)$ だからである。

- 大まかな妥当性の確認：丘の高さは $a/2$、幅は $2a$ しかないので、丘を越えても直線距離 $2a$ からそれほど長くはならないはずである。一方、ふもとを回る半円の長さは πa である。実際、$2.296a$ は $2a$ と πa の間にある。
- 数値的には、$a = 1$、$R = 3$ として $[0,1]$ の 201 個の点で $L(b)$ を数値積分（quadrature）により計算すると、最小値は $b = 0$ で得られる。また $L'(a) = \pi - 2\sqrt{2} \approx 0.313$ も依然として正である。

よくある間違い

- $L'(b) = 0$ とおいて $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4}$ と答え、それが a より大きいことに気づかない。
- 区間 (i) と (iii) に直線（弦（chord））の長さを用いる。それでは丘の中をトンネルで貫くことになってしまう。
- 閉区間（closed interval）における最小値が端点でとられることもあるのを忘れる。

STEP のその先へ

曲面上の最短経路を求めることは**測地線**（geodesics）の問題であり、変分法（calculus of variations）や微分幾何学（differential geometry）の最初の講義で出会う。回転面（surface of revolution）上では、クレロー（Clairaut）の関係式が測地線を見事に記述する。王の道路の族は、この問題を一つのパラメータで切り取った小さな断面にすぎない。ここで用いた解析学の二つの事実、すなわち積分をその端について微分すること、および閉区間上の連続関数は最小値をとるという事実は、Abbott, *Understanding Analysis* で丁寧に証明されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。