解答例

STEP III 1988、第 3 問

純粋数学 • 複素平面上の軌跡

STEP III 1988、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q3

鍵となる考え方

写像 $w = (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ は逆向きにたどることができる。z について解くと $z = \mathrm{i}(w+1)/(w-1)$ となるので、z に関するどんな条件も w に関する条件に書き換えられる。円の場合は、代わりにパラメータ表示（parametrisation）が役に立つ。このとき $z-\mathrm{i}$ は単に $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ となるからである。実数の場合と純虚数の場合は、絶対値（modulus）と偏角（argument）で考えるとよい。実数 z は i と $-\mathrm{i}$ から等距離にある。

解答

パラメータ表示

曲線 $|z-\mathrm{i}| = 2$ は中心 i、半径 2 の円であるから、

$$z = \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi,$$

あるいは $z = x + \mathrm{i}y$ とおけば $x = 2\cos\theta$、$y = 1 + 2\sin\theta$ である。

逆写像（inverse map）も用いる。$w(z-\mathrm{i}) = z+\mathrm{i}$ から $z(w-1) = \mathrm{i}(w+1)$ が得られるので、$w \neq 1$ のとき

$$z = \frac{\mathrm{i}(w+1)}{w-1}.$$

$w = 1$ を与える z は存在しない。そのためには $z+\mathrm{i} = z-\mathrm{i}$ が必要になるからである。$w \neq 1$ であるどの w も、ちょうど 1 つの $z \neq \mathrm{i}$ から得られる。

小問 (i)

パラメータ表示を代入すると、$z+\mathrm{i}=2\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$、$z-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ であるから、

$$w=\frac{2\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=1+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-\theta)}.$$

θ が1周するとき、$\pi/2-\theta$ もすべての角をちょうど1回ずつとる。よって w は円

$$|w-1|=1,$$

すなわち中心1、半径1の円の**全体**を描く。たとえば $z=3\mathrm{i}$ からは $w=2$ が、$z=-\mathrm{i}$ からは $w=0$ が得られる。点 $w=1$ はこの円上にないが、これは $w=1$ が決してとられないことと整合している。

小問 (ii)

$z=x$ が実数ならば、i からの距離と $-\mathrm{i}$ からの距離は等しいので、$|x+\mathrm{i}|=|x-\mathrm{i}|$ であり、

$$|w|=\frac{|x+\mathrm{i}|}{|x-\mathrm{i}|}=1.$$

具体的には、分母と分子に $x+\mathrm{i}$ を掛けて

$$w=\frac{(x+\mathrm{i})^2}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.$$

考えてみよう 単位円上のすべての点に到達するだろうか？

いや、完全にではない。$|w|=1$ かつ $w\neq 1$ である任意の w をとり、$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ と書く。すると

$$z=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1}=\mathrm{i}\,\frac{2\cos(\phi/2)}{2\mathrm{i}\sin(\phi/2)}=\cot\tfrac{\phi}{2},$$

となり、これは実数である。したがってそのような点はすべてとられるが、$w=1$ だけは決してとられない。これは $x\to\pm\infty$ のときの極限である。軌跡（locus）は単位円 $|w|=1$ から1点 $w=1$ を除いたものである。たとえば $x=0$ からは $w=-1$ が、$x=1$ からは $w=\mathrm{i}$ が得られる。

小問 (iii)

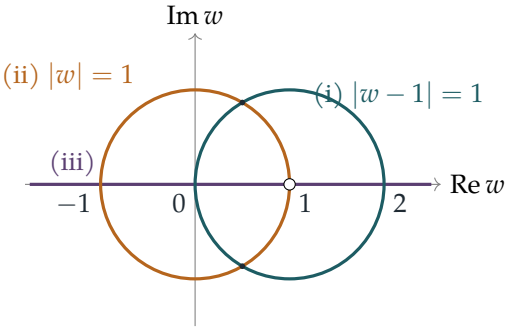
y を実数、$y\neq 1$ として $z=\mathrm{i}y$ ならば、

$$w=\frac{\mathrm{i}(y+1)}{\mathrm{i}(y-1)}=\frac{y+1}{y-1}=1+\frac{2}{y-1},$$

となり、これは実数である。y が1以外の実数全体を動くとき、分数 $2/(y-1)$ は0でないすべての実数値をとるので、w は1以外のすべての実数値をとる。（逆に、$w=u$

が実数で $u \neq 1$ ならば、$z = \mathrm{i}(u+1)/(u-1)$ は純虚数である。）軌跡は実軸から点 $w = 1$ を除いたものである。なお $z = 0$ からは $w = -1$ が得られる。「純虚数」が $z = 0$ を含まないと解釈するならば、$w = -1$ も除かれる。

図



青緑色の円が (i) の軌跡、琥珀色の円（点 1 を除く）が (ii) の軌跡、紫色の軸（点 1 を除く）が (iii) の軌跡である。白抜きの点は決してとられない $w = 1$ を表す。

検算

- (i) の円は実軸と $z = \pm\sqrt{3}$ で交わる。これらは青緑色の円と琥珀色の円の両方の上の点に写るはずであり、実際 $w(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^2/4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \approx 0.5 + 0.866\mathrm{i}$ は $|w| = 1$ 上にも $|w-1| = 1$ 上にもある。
- (i) の円は虚軸と $3\mathrm{i}$ および $-\mathrm{i}$ で交わり、これらは 2 と 0 に写る。これはちょうど青緑色の円が実軸と交わる点である。
- 各軌跡上の 10^4 個のランダムな点で数値的に確かめたところ、$|w-1| = 1$、$|w| = 1$、$\mathrm{Im}\, w = 0$ が成り立ち、逆写像によって z が復元されることも確認できた。

よくある間違い

- (ii) と (iii) で $w = 1$ が欠けていることを忘れる。これは「$z = \infty$」に対応する。
- (i) で x と y に分けて展開し、計算の中で迷子になる。パラメータ表示を使えば $z - \mathrm{i}$ は 1 つの指数関数になり、残りは 1 行で済む。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ はメビウス変換（Möbius transformation）である。このような写像は常に円と直線を円と直線に写す。これはまさに3つの小問すべてで見いだしたことである。メビウス変換はリーマン球面（Riemann sphere）の上で考えるのが最もわかりやすい。そこでは「無限遠点」を付け加えることで $w=1$ の穴が埋まる。その仲間であるケイリー変換（Cayley transform）$z \mapsto (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$ は、上半平面を単位円板の上に写す。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、これらすべてについての美しい幾何学的な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。