解答例

STEP III 1988、第 2 問

純粋数学 ・ 線形漸化式

STEP III 1988、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q2

鍵となる考え方

定数係数の線形漸化式（linear recurrence）は 2 次式のようにふるまう。べき x^n がこれを満たすのは、x が特性方程式（auxiliary equation）の根であるとき、かつそのときに限る。漸化式は最初の 2 項が決まればすべての項を決定するので、u_0 と u_1 を合わせるだけで唯一の解が得られる。最後の小問は係数が変数を含むが、因子 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ を見れば、それらの積で両辺を割ればよいことがわかる。そのうえで簡単な置き換えをすると、最初の種類の定数係数漸化式に帰着する。

解答

（問題文では漸化式の最高次の係数が α と印刷されている。2 次式 ax^2+bx+c と対応させれば、これは明らかに a の誤植であり、そのように読むことにする。）2 次方程式が 2 つの根をもつので、これは確かに 2 次式であり、$a \neq 0$ である。

この式が漸化式を満たすこと

任意の定数 A、B に対して $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$ とおく。すると

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= A\alpha^n\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) + B\beta^n\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) \\ &= A\alpha^n \cdot 0 + B\beta^n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

となる。α と β は $ax^2+bx+c=0$ の根だからである。よって漸化式はすべての $n \geq 0$ で成り立つ。

与えられた特定の A と B を用いると、この式は初期値も再現する。$n=0$ のとき

$$A+B=\frac{(u_1-\beta u_0)-(u_1-\alpha u_0)}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)u_0}{\alpha-\beta}=u_0,$$

であり、$n=1$ のとき

$$A\alpha+B\beta=\frac{\alpha u_1-\alpha\beta u_0-\beta u_1+\alpha\beta u_0}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)u_1}{\alpha-\beta}=u_1.$$

である。根が相異なるので、$\alpha-\beta$ で割ってよい。

これが唯一の解であること

考えてみよう 正確には何について帰納法を用いているのか。また、なぜ2項ずつ扱う必要があるのか。

$u_0, u_1, u_2, \ldots$ を漸化式を満たす任意の数列とし、その u_0 と u_1 から上のように A、B を作る。$w_n=A\alpha^n+B\beta^n$ とおく。n についての数学的帰納法（induction）により、次の命題を証明する。

$$P(n):\quad u_n=w_n \text{ かつ} u_{n+1}=w_{n+1}.$$

新しい項はそれぞれ直前の2項に依存するので、命題は連続する2項を含んでいなければならない。

基底段階。 $P(0)$ は $u_0=w_0$ かつ $u_1=w_1$ を主張するが、これは上で確かめたとおりである。

帰納段階。 $P(n)$ を仮定する。(u_n) と (w_n) はともに漸化式を満たし、$a\neq 0$ であるから

$$u_{n+2}=-\frac{bu_{n+1}+cu_n}{a}=-\frac{bw_{n+1}+cw_n}{a}=w_{n+2}.$$

これと $u_{n+1}=w_{n+1}$ を合わせたものが $P(n+1)$ である。

したがって $P(n)$ はすべての $n\geq 0$ で成り立ち、すべての n について $u_n=A\alpha^n+B\beta^n$ である。漸化式のどの解もこの形をしており、A と B は u_0 と u_1 によって決まる。この式が唯一の解を与える。

数列 v_n

どの係数も、3つの因子 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ のうち2つの積であり、それぞれ異なる1つが欠けている。$n\geq 0$ で決して0にならない $(n+1)(n+2)(n+3)$ で割ると

$$8\,\frac{v_{n+2}}{n+3}-2\,\frac{v_{n+1}}{n+2}-\frac{v_n}{n+1}=0.$$

を得る。どの分数も $v_k/(k+1)$ の形をしている。そこで

$$w_n=\frac{v_n}{n+1},$$

とおくと、漸化式は

$$8w_{n+2} - 2w_{n+1} - w_n = 0, \qquad w_0 = 0, \quad w_1 = \tfrac{1}{2}.$$

となる。特性方程式は $8x^2 - 2x - 1 = 0$、すなわち $(2x-1)(4x+1) = 0$ である。その根 $\alpha = \frac{1}{2}$ と $\beta = -\frac{1}{4}$ は相異なる実数なので、$\alpha - \beta = \frac{3}{4}$ として最初の小問が適用できる。

$$A = \frac{w_1 - \beta w_0}{\alpha - \beta} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{w_1 - \alpha w_0}{\beta - \alpha} = \frac{1/2}{-3/4} = -\frac{2}{3}.$$

よって $w_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$ である。最初の小問から、これが w_n として、したがって v_n としても唯一の可能性であることもわかる。$n+1$ を掛けて戻すと

$$\boxed{v_n = \frac{2(n+1)}{3}\left(\frac{1}{2^n} - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

検算

この式から $v_0 = \frac{2}{3}(1-1) = 0$、$v_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1$ となり、条件どおりである。元の漸化式を $n = 0$ と $n = 1$ で手計算すると、$16v_2 = 6v_1 + 6v_0$ より $v_2 = \frac{3}{8}$、続いて $48v_3 = 16v_2 + 12v_1$ より $v_3 = \frac{3}{8}$ を得る。式もこれと一致する：$v_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$、$v_3 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) = \frac{3}{8}$。さらに、$n$ が 41 までの範囲で有理数演算により式が漸化式と厳密に一致することを確かめ、最初の小問についても数百通りのランダムな 2 次式と初期値で確かめた。

よくある間違い

- 帰納法を 1 項ずつ行ってしまう。$u_n = w_n$ だけがわかっていても、u_{n+1} については何も導けない。仮定は連続する 2 項を含んでいなければならない。
- a で割ってよい理由（方程式が 2 つの根をもつので 0 でない）と、$\alpha - \beta$ で割ってよい理由（根が相異なる）を述べ忘れる。
- 最初の小問を v_n に直接適用してしまう。その係数は n に依存するので、最初の小問が適用できるのは尺度を変えた数列 $w_n = v_n/(n+1)$ のほうである。

STEP のその先へ

2 階線形漸化式の解全体は 2 次元のベクトル空間（vector space）をなし、α^n、β^n はその基底（basis）である。これは解 $e^{\alpha x}$ と $e^{\beta x}$ をもつ微分方程式（differential

equation）$ay'' + by' + cy = 0$ とまったく平行している。2×2 行列 M を用いて漸化式を $\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n$ と書くと、α と β が M の固有値（eigenvalue）であることがわかり、重根は対角化（diagonalise）できない行列に対応する。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はまさにこのように固有値を通して差分方程式を扱っており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）は微分方程式について平行する理論を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。