解答例

STEP III 1988、第 15 問

確率・統計 ・ 期待値の漸化式

STEP III 1988、問 15

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q15

鍵となる考え方

その日の**最初の**本で条件付け（conditioning）をする。最初の本が棚に置かれると、その日の残りは、棚が短くなった新しい一日とまったく同じように見える。したがって、長さ n の棚に対する期待値（expected value）は、長さ $n-1$ と $n-2$ に対する期待値と結びつく。こうして線形差分方程式（linear difference equation）が得られる。これは二階漸化式（second-order recurrence）とまったく同じように解ける。すなわち、斉次（homogeneous）部分には補助方程式（auxiliary equation）となる二次方程式を用い、右辺の定数 1 に対しては特殊解（particular solution）を加えればよい。

解答

以下では、棚の長さが n である日に棚に置かれる本の冊数を N_n とし、$M(n) = \mathrm{E}(N_n)$ とする。各本は互いに独立に厚いか薄いかが決まり、厚い確率はそれぞれ p である。本は常に棚に収まりきらないほどあると述べられているので、その日は必ず、ある本が収まらないことで終わる。

小問 (i)

$n = 0$ のとき、空きはまったくない。最初の本は厚くても薄くても収まらないので、その本とそれ以降のすべての本はワゴンに置かれる。よって常に $N_0 = 0$ であり、$M(0) = 0$ である。

小問 (ii)

$n = 1$ のとき、最初の本に注目する。

- 薄い場合（確率 q）、その本は収まり、棚は満杯になる。次の本は少なくとも 1 単位を必要とするので収まらず、それ以降はすべてワゴンに置かれる。よって $N_1 = 1$ である。
- 厚い場合（確率 p）、その本は 2 単位を必要とするので収まらず、$N_1 = 0$ である。

したがって $M(1) = q \cdot 1 + p \cdot 0 = q$ である。

小問 (iii)

$n \geq 2$ とし、再び最初の本で条件付けをする。最初の本は高々 $2 \leq n$ 単位しか必要としないので、どちらであっても収まる。

- 薄い場合（確率 q）、その本は棚に置かれ、$n-1$ 単位が残る。
- 厚い場合（確率 p）、その本は棚に置かれ、$n-2$ 単位が残る。

> **考えてみよう** 最初の場合に、その後棚に置かれる本の冊数の期待値がちょうど $M(n-1)$ になるのはなぜか。

最初の本の後、残りの本は順に到着し、最初の本とは独立に同じ確率で厚いか薄いかが決まり、同じ規則で置かれる。すなわち、収まらない本が現れるまで棚に置き、そこで終わる。最初の本が変えたのは空きの大きさだけであり、それは今や $n-1$ 単位である。よってその日の残りは、長さ $n-1$ の棚での一日全体の複製であり、その後棚に置かれる本の冊数の期待値は $M(n-1)$ である。同様に、最初の本が厚い場合には $M(n-2)$ である。（小問 (i) により、これは $n-2 = 0$ のときにも成り立つ。）

最初の本も数に入れると、全期待値の法則（law of total expectation）により

$$\begin{aligned} M(n) &= q\big(1 + M(n-1)\big) + p\big(1 + M(n-2)\big) \\ &= (p+q) + qM(n-1) + pM(n-2), \end{aligned}$$

であり、$p + q = 1$ であるから

$$M(n) - qM(n-1) - pM(n-2) = 1 \qquad (n \geq 2),$$

となり、示すべき式が得られた。

一般項

まず斉次方程式 $M(n) - qM(n-1) - pM(n-2) = 0$ を考える。$M(n) = \lambda^n$ とおくと、補助方程式

$$\lambda^2 - q\lambda - p = 0.$$

が得られる。$q = 1 - p$ であるから $\lambda = 1$ は根であり（$1 - q - p = 0$）、根の積は $-p$ であるので

$$\lambda^2 - q\lambda - p = (\lambda - 1)(\lambda + p).$$

となる。よって、任意の A と B に対して、$A(-p)^n$ と定数 B は斉次方程式を満たす。

1 が根であるから、定数では右辺の 1 を作り出せない。そこで Cn を試す。代入すると

$$\begin{aligned} Cn - qC(n-1) - pC(n-2) &= C\big[(1-q-p)n + q + 2p\big] \\ &= C(q + 2p) = C(1 + p). \end{aligned}$$

となる。これは $C = \dfrac{1}{1+p}$ のとき 1 に等しく、$1 + p > 0$ であるからこれで問題ない。よって線形性（linearity）により、A と B が何であっても、$M(n) = A(-p)^n + B + Cn$ はすべての $n \geq 2$ に対して (iii) の方程式を満たす。

次に初期値に合わせる。小問 (i) より

$$M(0) = A + B = 0, \qquad \text{よって} B = -A,$$

であり、小問 (ii) より

$$M(1) = -Ap + B + C = -A(1 + p) + \frac{1}{1+p} = 1 - p.$$

である。したがって

$$A(1 + p) = \frac{1}{1+p} - (1 - p) = \frac{1 - (1 - p^2)}{1 + p} = \frac{p^2}{1+p},$$

となり、

$$A = \frac{p^2}{(1+p)^2}, \qquad B = -\frac{p^2}{(1+p)^2}, \qquad C = \frac{1}{1+p}.$$

を得る。すなわち

$$M(n) = \frac{n}{1+p} - \frac{p^2}{(1+p)^2}\big(1 - (-p)^n\big).$$

である。(i)、(ii)、(iii) によって $M(0)$、$M(1)$、そしてそれ以降の各値が順に定まるので、これは単にありうる解の一つではなく、唯一の解である。

検算

- $p = 0$（すべて薄い）：$M(n) = n$ となり、当然そうなるべき値である。
- $p = 1$（すべて厚い）：$M(n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\bigl(1 - (-1)^n\bigr)$ であり、これは偶数の n に対して $\frac{n}{2}$、奇数の n に対して $\frac{n-1}{2}$、すなわち $\lfloor n/2 \rfloor$ である。正しい。
- $p = q = \frac{1}{2}$ として漸化式から直接計算すると $M(2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ であり、公式からは $\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ が得られる。
- n が大きいとき、各本は平均して $1 + p$ 単位を使うので、およそ $n/(1+p)$ 冊が置かれると期待される。公式はこれと一致し、棚の端で無駄になる空きの分だけ有界な補正がつく。

一般項は、$n \le 12$ およびいくつかの p の値について棚に置く過程を厳密に数え上げたものと照合し、さらにシミュレーションでも確認した。たとえば $p = \frac{1}{2}$、$n = 5$ のとき、どちらも $M(5) = \frac{103}{32} \approx 3.219$ を与える。

よくある間違い

- 厚い本が収まらなかった後でも、薄い本ならまだ棚に置けると考えてしまうこと。問題文には以降の本はすべてワゴンに置かれるとあり、まさにそのために $M(1) = q$ となり、それより大きな値にはならないのである。
- 特殊解として定数を試すこと。$\lambda = 1$ は補助方程式の解であるから、定数は斉次部分に吸収されてしまい、Cn が必要になる。

STEP のその先へ

最初の一歩で条件付けをし、残りが同じ問題の小さな複製であることに気づく手法は、**第一ステップ解析**（first-step analysis）と呼ばれる。これはマルコフ連鎖（Markov chain）において、到達時間（hitting time）の期待値や吸収確率（absorption probability）を求める標準的な方法である。今回の答えは**再生定理**（renewal theorem）の例にもなっている。すなわち、大きさがランダムな品物を長さ n に詰めていくと、収まる個数は n を平均の大きさで割ったものと同じように増えていく。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダムウォーク（random walk）に対する差分方程式とマルコフ連鎖の入門の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。