解答例

STEP III 1988、第 14 問

力学 ・ なめらかな針金上の運動

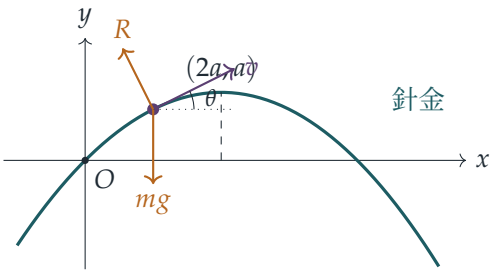
> **STEP III 1988、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q14

鍵となる考え方

針金から力を受けないビーズは、単に重力だけを受けて運動する放物体（projectile）である。したがって小問 (i) は、針金に沿って打ち出された自由な放物体が、針金の放物線をそのままたどることができるか、という問いである。二つの放物線を一致させればよい。小問 (ii) では、針金はなめらか（smooth）なので、エネルギーが保存される。$\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を用いて、速さと高さを傾きの角 θ で表すところが要である。

解答

ビーズを、固定されたなめらかな針金上の質量 m の質点としてモデル化する。はたらく力は、下向きの重力 mg と、針金に垂直な針金からの垂直抗力（normal reaction）R だけである。



針金について、次の二つの事実を全体を通して用いる。一般の点において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a},$$

であるから、原点での傾きは 1 であり、ビーズは x 軸から上向きに 45° の方向に出発する。また、針金は下に開いた放物線なので、最高点は $x = 2a$、$y = a$ である。

小問 (i)

運動の間ずっと $R = 0$ であるとする。このとき重力だけがはたらくので、ビーズは初速 V、仰角 45° の放物体とまったく同じように運動する。水平方向の速度は $V/\sqrt{2}$ で一定なので、$x = Vt/\sqrt{2}$ である。また

$$y = \frac{V}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$ を消去すると、軌道は

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

となる。これがビーズの経路となるのは、ビーズが到達するすべての x について、これが針金 $y = x - x^2/(4a)$ と一致する場合に限る。そのためには

$$\frac{g}{V^2} = \frac{1}{4a}, \qquad \text{すなわち} \qquad V = 2\sqrt{ag}.$$

が必要である。

逆に、$V = 2\sqrt{ag}$ とする。この速さで O から 45° の方向に打ち出された自由な質点は、曲線 $y = x - x^2/(4a)$、すなわち針金そのものをたどる。したがって質点は各瞬間に $R = 0$ のまま針金に沿って運動し、この運動は抗力が 0 の場合のビーズの運動方程式（equation of motion）を満たす。$x = Vt/\sqrt{2}$ は一定の割合で増加するので、ビーズは頂点 $(2a, a)$ を越え、その後もずっと反対側を下り続ける。この間ずっとビーズは針金に圧力を及ぼさず、題意は満たされる。求める速さは $V = 2\sqrt{ag}$ である。

考えてみよう 針金上のビーズが、抗力をまったく受けずに運動できるのはなぜだろうか。針金がビーズを支えていなければならないのではないか。

針金が押す必要があるのは、重力だけではビーズが曲線から外れてしまう場合に限られる。それ以外の速さでは、実際に外れてしまう。V が大きいと放物体の放物線はより平らになるので、針金はビーズを下に引かなければならない。V が小さいと放物線はより強く曲がるので、針金はビーズを上に支えなければならない。ちょうど $V = 2\sqrt{ag}$ のときには、曲線に沿うために必要な加速度を重力がすでに与えており、針金がすべきことは何もない。

小問 (ii)

ここでは V は一般の値である。速度は針金の接線（tangent）方向を向くので

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a}, \qquad \text{よって} \qquad x = 2a(1-\tan\theta).$$

（ビーズが滑り戻る場合、速度は接線に沿って逆向きになり、角は π だけ変わる。このとき $\tan\theta$ と $\cos^6\theta$ は変わらないので、以下の議論には影響しない。）

速さを θ で表す。 $x = 2a(1-\tan\theta)$ を t で微分すると

$$\dot{x} = -2a\sec^2\theta\,\dot{\theta}.$$

となる。$\dot{y} = \tan\theta\,\dot{x}$ であるから、速さ v は

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+\tan^2\theta) = \dot{x}^2\sec^2\theta = \frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta}.$$

を満たす。

高さを θ で表す。 $T = \tan\theta$ とおくと $x = 2a(1-T)$ であり、

$$\begin{aligned} y = x - \frac{x^2}{4a} &= 2a(1-T) - a(1-T)^2 \\ &= a(1-T)\big(2-(1-T)\big) \\ &= a(1-T)(1+T) = a(1-\tan^2\theta). \end{aligned}$$

エネルギー。針金はなめらかで、R は速度に垂直なので、R は仕事をせず、力学的エネルギーが保存される（conservation of mechanical energy）。ビーズは O から速さ V で出発するので

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mV^2, \qquad \text{すなわち} \qquad v^2 + 2gy = V^2.$$

v^2 と y の式を代入すると

$$\frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta} + 2ga(1-\tan^2\theta) = V^2,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $t = 0$ では $\theta = 45^\circ$ なので $\tan^2\theta = 1$ となり、第 2 項は消える。このとき第 1 項は $v^2 = V^2$ であり、確かにそうなるべき値である。

- 小問 (i) の $V^2 = 4ag$ のとき、$\dot{x} = V/\sqrt{2}$ は一定なので $\dot{\theta} = -\dot{x}\cos^2\theta/(2a)$ である。第 1 項は $2ag\sec^2\theta = 2ag(1+\tan^2\theta)$ となる。これに $2ga(1-\tan^2\theta)$ を加えると $4ag = V^2$ となり、二つの小問の結果は整合する。
- 数値的にも、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用いて、針金に沿ったビーズの運動方程式を時間発展させた。$a = 1$、$g = 9.8$、$V = 2\sqrt{9.8}$ のとき、計算された垂直抗力は（単位質量あたり）$x \approx 13$ に至るまでずっと 10^{-15} 未満であった。V を 30% 増やすと、出発時の値はおよそ 4.8 であった。ビーズが滑り戻る場合も含めて V をランダムに選ぶと、(ii) の等式は相対誤差およそ 10^{-13} で成り立った。

よくある間違い

- 打ち出した瞬間に $R = 0$ であることだけを示してしまう。問題が求めているのは**運動の間ずっと**抗力がない運動であり、だからこそ軌道全体を針金と一致させたのである。
- $\tan\theta$ を微分するときに、連鎖律（chain rule）による因子 $\sec^2\theta$ を忘れる。そうすると第 1 項が $\cos^6\theta$ ではなく $\cos^2\theta$ になってしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は運動の第一積分（first integral）である。エネルギー保存によって、2 階の方程式が、ただ一つの座標（ここでは θ）に関する 1 階の方程式に帰着される。大学 1 年の講義では、これは束縛運動（constrained motion）に対するラグランジュ（Lagrange）流の方法へと発展する。そこでは束縛を記述する座標を一つ選べば、抗力を計算する必要はまったくない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、束縛運動とエネルギーを用いる方法が丁寧に扱われているのを見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。