解答例

STEP III 1988、第 13 問

力学 ・ 空気抵抗のある放物運動

STEP III 1988、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q13

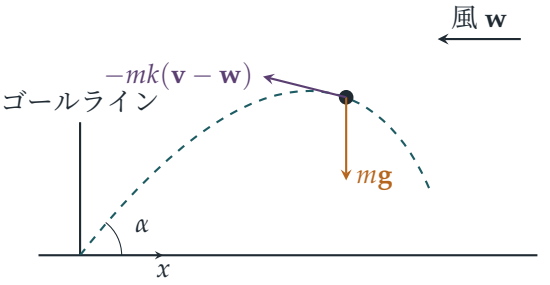
鍵となる考え方

速度に比例する空気抵抗（air resistance）を考えると、運動方程式（equation of motion）は線形（linear）になるので、各成分を積分因子（integrating factor）を用いて解くことができる。最後の部分を見通すうまい方法は、終端速度（terminal velocity）が何であるかを問うことである。速度は初期値から終端速度へ向かって指数関数的に緩和していく。したがって、この二つのベクトルが平行であれば、速度は原点を通る一本の直線から決して外れない。このときボールは同じ直線経路に沿って飛び出し、そして戻ってくる。

解答

運動方程式

ボールを質量 m の質点としてモデル化する。ボールには二つの力がはたらく。重力 $m\mathbf{g}$ と空気抵抗である。空気に対するボールの相対速度は $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ であり、抵抗はこれと逆向きにはたらくので、抵抗は $-mk(\mathbf{v}-\mathbf{w})$ である。



ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則より

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - mk(\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

両辺を m で割って整理すると

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + k\mathbf{v} = \mathbf{g} + k\mathbf{w},$$

となり、示すべき式が得られる。

時刻 t における位置

ボールを蹴った点を原点とし、x 軸を蹴った向きに水平にとり、y 軸を鉛直上向きにとる。$V = |\mathbf{v}_0|$、$W = |\mathbf{w}|$、$g = |\mathbf{g}|$ とおく。ボールは風に向かって蹴られるので

$$\mathbf{w} = (-W, 0), \qquad \mathbf{g} = (0, -g), \qquad \mathbf{v}_0 = (V\cos\alpha, V\sin\alpha).$$

$\mathbf{v} = (u, v)$ とすると、運動方程式の二つの成分は

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = -kW, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = -g.$$

第 1 式に積分因子 e^{kt} を掛けると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\,\mathrm{e}^{kt}) = -kW\mathrm{e}^{kt}$ となるので、$u\,\mathrm{e}^{kt} = -W\mathrm{e}^{kt} + C$ である。$t = 0$ で $u = V\cos\alpha$ であるから $C = V\cos\alpha + W$ となり、

$$u = -W + (V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

まったく同様にして

$$v = -\frac{g}{k} + \left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$

$t = 0$ で $x = y = 0$ であることと $\int_0^t \mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})$ を用いて、0 から t までもう一度積分すると

$$x = -Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}),$$
$$y = -\frac{g}{k}\,t + \frac{1}{k}\left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{w} + \mathbf{g}/k$（終端速度、すなわち運動方程式の定数解）とおけば、これはベクトル形式で

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_\infty t + \frac{1}{k}\,(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_\infty)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

と書ける。

オウンゴール

考えてみよう $\tan\alpha = g/(kW)$ は終端速度について何を述べているか。

終端速度は $\mathbf{u}_\infty = (-W, -g/k) = -W(1, g/(kW))$ である。条件は $g/(kW) = \tan\alpha$ を意味するので $\mathbf{u}_\infty = -W(1, \tan\alpha)$ となり、これは $\mathbf{v}_0$ に平行である（向きは逆である）。するとベクトル形式の式から、$\mathbf{r}$ はつねに方向 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ に沿った二つのベクトルの一次結合であることがわかる。したがってボールは直線 $y = x\tan\alpha$ に沿って運動する。

成分から直接これを確かめるには、$g/k = W\tan\alpha$ を用いる。

$$V\sin\alpha + \frac{g}{k} = V\sin\alpha + W\tan\alpha = \tan\alpha\,(V\cos\alpha + W),$$

であるから

$$y = \tan\alpha\left[-Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right] = x\tan\alpha \quad \text{任意の} t \geq 0.$$

が成り立つ。

よってボールが地面の高さ $y = 0$ にあるのは、ちょうど $x = 0$ のときである（$\tan\alpha \neq 0$ であるから）。あとは、これがある $t > 0$ で起こることを確かめればよい。$f(t) = x(t)$ とおく。すると $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = V\cos\alpha > 0$ であるから、蹴った直後は $x > 0$ である。また

$$f''(t) = -k(V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt} < 0,$$

であるから f は狭義凹（strictly concave）であり、$-Wt$ の項があるので $t \to \infty$ のとき $f(t) \to -\infty$ となる。したがって f はちょうど一つの正の零点 T をもち、そこで $f'(T) < 0$ である（0 から増加した凹関数が再び 0 に戻るときには、減少していなければならない）。

時刻 T において、ボールは原点、すなわち蹴られたゴールライン上の点に戻っており、負の水平速度で、つまりゴールに向かって運動している。ボールは飛び出していった直線を逆にたどって戻り、地面の高さで、クロスバーのはるか下でゴールラインを越える。ゴールキーパーが前に出ていれば、これはオウンゴール（own goal）となる。

検算

- $k \to 0$ のとき $\frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \to t$ かつ $\frac{1}{k}\left(t - \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right) \to \frac{1}{2}t^2$ であるから、$x \to Vt\cos\alpha$、$y \to Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ となる。これは通常の放物運動である。
- $t \to \infty$ のとき速度は運動方程式の定数解 $(-W, -g/k)$ に近づく。すなわちボールは最終的に、終端速さで落下しながら風に流されていく。

- 運動方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値積分したところ、V, α, W, k の多数のランダムな選び方について、x と y の式と約 10^{-13} の精度で一致した。$\tan\alpha = g/(kW)$ のとき、計算された経路は $y = x\tan\alpha$ 上にとどまり、$u < 0$ の状態で $x = 0$ に着地した。一方、たとえば $V = 20$、$\alpha = 0.6$、$W = 5$、$k = 0.5$ とすると、ボールはそうはならず 17.1 m 前方に着地した。

よくある間違い

- 抵抗を $-mk(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ ではなく（地面に対する）$-mk\mathbf{v}$ としてしまう。
- $\mathbf{w}$ の符号を誤る。ボールは風に**向かって**蹴られるので、$\mathbf{w}$ はゴールの方向を向く。
- $y = x\tan\alpha$ で止めてしまい、ボールが本当に $x = 0$ に戻ってくること、そしてそのときゴールに向かって運動していることを確かめない。

STEP のその先へ

$\mathbf{F}$ を定数とする方程式 $\dot{\mathbf{v}} + k\mathbf{v} = \mathbf{F}$ は、平衡状態へ緩和する線形系の最も簡単な例である。ずれ $\mathbf{v} - \mathbf{F}/k$ は e^{-kt} のように減衰する。線形の抗力（drag）が現実的なのは、遅く小さな物体の場合に限られる。実際のサッカーボールが受ける抗力はおおよそ速さの 2 乗に比例し、そのため方程式は非線形（nonlinear）となり、水平方向と鉛直方向の運動が連成する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、両方の種類の抗力が論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。