解答例

STEP III 1988、第 12 問

力学 ・ 斜め衝突

STEP III 1988、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q12

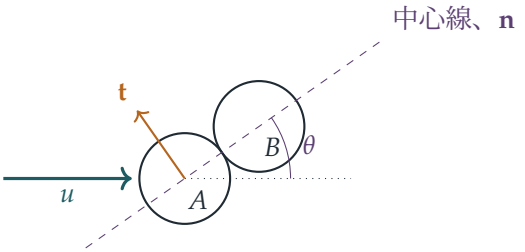
鍵となる考え方

滑らかな球（smooth spheres）どうしの衝突では、力積（impulse）は衝突の瞬間の中心線（line of centres）に沿ってのみはたらく。そこで、すべての速度をこの線に沿った成分とそれに垂直な成分に分解する。垂直成分は変化せず、中心線に沿った方向では通常の 1 次元の衝突が起こる。こうするとすべては、中心線と第 1 の球のもとの速度とのなす角という、ただ一つの未知数で決まる。

解答

設定

2 つの球を、滑らかな台の上を滑る、等しい質量 m の滑らかな球としてモデル化する。したがって、衝突中にはたらく水平方向の力は中心線に沿った接触力積だけである。第 1 の球 A は速さ u で運動しているとし、衝突時に中心線が A の速度となす角を θ とする。ただし $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$ である（$\theta = \frac{1}{2}\pi$ のときは球がかすめるだけで何も起こらない）。中心線に沿った（A から B へ向かう）単位ベクトルを $\mathbf{n}$、それに垂直な単位ベクトルを $\mathbf{t}$ とする。



衝突前、A の速度は $\mathbf{n}$ 方向の成分 $u\cos\theta$ と $\mathbf{t}$ 方向の成分 $u\sin\theta$ をもつ。B は静止している。

$\mathbf{t}$ 方向：この方向にはどちらの球にも力積がはたらかないので、A は $u\sin\theta$ を、B は 0 を保つ。

$\mathbf{n}$ 方向：衝突後の成分を v_A、v_B とする。運動量保存則（conservation of momentum）（質量は約分される）とニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）より

$$v_A + v_B = u\cos\theta, \qquad v_B - v_A = e\,u\cos\theta,$$

であるから

$$v_A = \tfrac{1}{2}(1-e)\,u\cos\theta, \qquad v_B = \tfrac{1}{2}(1+e)\,u\cos\theta.$$

よって衝突後は

$$\mathbf{v}_A = \tfrac{1}{2}(1-e)u\cos\theta\,\mathbf{n} + u\sin\theta\,\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{2}(1+e)u\cos\theta\,\mathbf{n}.$$

2 つの速度のなす角

B は中心線に沿って運動する。2 つの速度のなす角が鋭角であることは、それらの内積（scalar product）が正であることと同値である。ここで

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{4}(1-e)(1+e)\,u^2\cos^2\theta > 0,$$

である。なぜなら $e<1$、$u\neq 0$ であり、$0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$ に対して $\cos\theta>0$ だからである。したがって、2 つの速度のなす角は $\frac{1}{2}\pi$ より小さく、示すべきことが示された。（正面衝突 $\theta=0$ の場合は、両方の球が同じ直線に沿って運動し、なす角は 0 である。）

$e<1$ をどこで用いたかに注意しよう。$e=1$ ならば $v_A=0$ となり、2 つの球はちょうど直角に分かれる。これはスヌーカー（snooker）でよく知られた結果である。

最大の偏向角

A が曲げられる角を ϕ とする。すなわち、$\mathbf{v}_A$ ともとの向き $\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t}$ とのなす角である。$k=\frac{1}{2}(1-e)$ とおくと、$0<k\le\frac{1}{2}$ であり、$\mathbf{v}_A = u(k\cos\theta\,\mathbf{n}+\sin\theta\,\mathbf{t})$ である。方向ベクトル $(\cos\theta,\sin\theta)$ と $(k\cos\theta,\sin\theta)$ の内積と 2 次元の外積（cross product）を用いると

$$|\mathbf{v}_A|\cos\phi = u\,(k\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$
$$|\mathbf{v}_A|\sin\phi = u\,(\cos\theta\sin\theta - k\cos\theta\sin\theta) = u\,(1-k)\sin\theta\cos\theta.$$

第 1 式は正であるから ϕ は鋭角である。辺々割り算し（さらに分子と分母を $\cos^2\theta$ で割り）、$t=\tan\theta\ge 0$ とおくと

$$\tan\phi = \frac{(1-k)t}{k+t^2}.$$

考えてみよう 面倒な微分をせずに、これを最大化するにはどうすればよいか。

ϕ は鋭角なので、ϕ を最大化することは $\tan\phi$ を最大化することと同じである。$t>0$ に対して

$$\tan\phi=\frac{1-k}{k/t+t}\quad\text{であり}\quad\frac{k}{t}+t\geq 2\sqrt{k}$$

が相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）より成り立ち、等号はちょうど $t=\sqrt{k}$ のときに成立する。（$t=0$ のときは $\phi=0$ である。）よって最大値は $\tan\theta=\sqrt{k}$ のときにとられ、

$$\tan\phi_{\max}=\frac{1-k}{2\sqrt{k}}.$$

これを正弦に直すために、$(1-k)^2+(2\sqrt{k})^2=1-2k+k^2+4k=(1+k)^2$ に注意する。すると、直角をはさむ 2 辺が $1-k$ と $2\sqrt{k}$ である直角三角形の斜辺は $1+k$ であり、

$$\sin\phi_{\max}=\frac{1-k}{1+k}=\frac{\frac{1}{2}(1+e)}{\frac{1}{2}(3-e)}=\frac{1+e}{3-e},$$

となる。ここで $1-k=\frac{1}{2}(1+e)$ と $1+k=\frac{1}{2}(3-e)$ を用いた。$\phi_{\max}$ は鋭角であるから

$$\phi_{\max}=\sin^{-1}\left(\frac{1+e}{3-e}\right),$$

であり、これが求める結果である。これは、中心線がもとの運動の向きと角 $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1-e)}$ をなすときに起こる。

検算

- $e\to 1$：公式は $\sin^{-1}1=\frac{1}{2}\pi$ を与え、完全弾性（perfectly elastic）の場合と整合する。このとき A は中心線に沿った速度をすべて失うので、常にその線に直角に運動する。正面衝突に近い衝突では、A はもとの経路にほぼ直角な向きにはじき出される。
- $e=0$：$\sin\phi_{\max}=\frac{1}{3}$ であるから $\phi_{\max}\approx 0.3398$ rad（19.5°）である。
- $e=\frac{1}{2}$：$\sin\phi_{\max}=\frac{3}{5}$、$\phi_{\max}\approx 0.6435$ rad であり、これは $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2}\approx 0.4636$ のときに起こる。θ の 200 000 個の値について偏向角を数値的に調べたところ、両方の数値が再現された。また、200 000 回のランダムな衝突のいずれにおいても、2 つの速度のなす角が $\frac{1}{2}\pi$ 以上になることはなかった。

よくある間違い

- 反発の法則を、中心線に沿った成分ではなく速さ全体に適用してしまう。

- A の速度の垂直成分が変化しないことを忘れる。そもそも A が曲げられるのはこの成分のおかげである。
- 逆正接を微分して ϕ そのものを最大化しようとする。$\tan\phi$ で考える方が（ϕ が鋭角なのでこれは正当である）はるかにすっきりする。

STEP のその先へ

ここでの分解は、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）の力積による形である。すなわち、力積は運動量をそのはたらく向きにのみ変化させる。弾性衝突の場合、直角になるという結果は、座標系を用いた鮮やかな議論の特別な場合である。重心系（centre-of-mass frame）では、弾性衝突はそれぞれの球の速さを保ち、向きを変えるだけである。そして実験室系（lab frame）に変換し直すと、起こりうるすべての結果が一度に得られる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突をこのように重心系で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。