解答例

STEP III 1988、第 11 問

力学 ・ 摩擦のある梯子のつり合い

> **STEP III 1988、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q11

鍵となる考え方

まず幾何を整理する。地面、斜面（ramp）、はしごは三角形をなし、その角はすでにわかっている。そこから、なめらかな斜面がはしごの上端をどの向きに押すかがわかる。その後は、はしごの問題の定番の手順に従えばよい。2 方向に力を分解し、下端のまわりの力のモーメント（moments）をとり、必要な摩擦力（friction）を μ と垂直抗力（normal reaction）の積と比べるのである。作業員の位置はモーメントの式にしか現れないので、一つの一般的な式で両方の小問に答えられる。

解答

設定

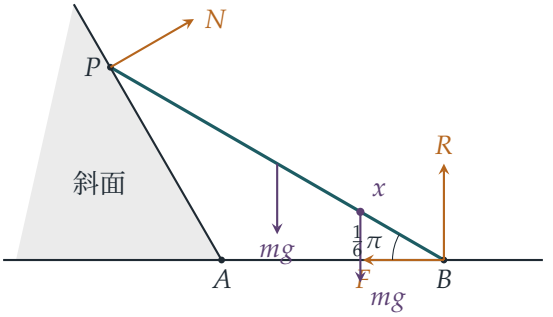
はしごを一様な棒（uniform rod）、作業員を質点（particle）としてモデル化する。A を斜面の下端、B をはしごの下端、P を斜面上にあるはしごの上端とする。

幾何。三角形 ABP において、B における角は $\frac{1}{6}\pi$（はしごの傾き）である。斜面は鉛直方向と $\frac{1}{6}\pi$ をなすので、A の向こう側で水平方向と $\frac{1}{3}\pi$ をなす。したがって三角形の内部の A における角は $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ であり、P における角は $\frac{1}{6}\pi$ となる。よってこの三角形は $AP = AB$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であり、正弦定理（sine rule）より

$$AB = \frac{l \sin \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

となって、与えられた距離と一致する。データに矛盾はなく、P は確かに斜面上にある。

斜面からの抗力の向き。斜面はなめらかなので、斜面がはしごに及ぼす抗力 N は斜面に垂直である。斜面は水平方向と $\frac{1}{3}\pi$ をなすので、その法線は水平方向と $\frac{1}{6}\pi$ をなし、斜面から離れて B の方へ、上向きに向いている。よって N の水平成分 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ ははしごを斜面から遠ざける向きに押し、鉛直成分 $\frac{1}{2}N$ は上向きである。



方程式。作業員が B からはしごに沿って距離 x だけ上った位置にいるとする。B では、地面から上向きの垂直抗力 R と、斜面の方へ向かう水平な摩擦力 F がはたらく（それ以外の水平な力は N の成分だけであり、これは下端を斜面から遠ざける向きに押すので、摩擦力はそれに逆らう向きでなければならない）。

水平方向と鉛直方向に力を分解すると

$$F = \frac{\sqrt{3}}{2}N, \qquad\qquad R + \frac{1}{2}N = 2mg.$$

R と F が消えるように、B のまわりのモーメントをとる。はしごに沿って距離 s だけ上った点と B との水平距離は $s\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ である。N の作用線（line of action）は水平方向と $\frac{1}{6}\pi$ をなし、一方 BP は水平方向の反対側に $\frac{1}{6}\pi$ をなすので、N ははしごと角 $\frac{1}{3}\pi$ をなす。B のまわりの N のモーメントは $Nl\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}Nl$ である。よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}Nl = mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{l}{2} + mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad\Longrightarrow\quad N = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right).$$

? **考えてみよう** N のモーメントがこれほど簡単に求まるのはなぜだろうか？

N ははしごと $\frac{1}{3}\pi$ の角で交わるので、B から N の作用線までの垂直距離は $l\sin\frac{1}{3}\pi$ である。あるいは N を成分に分けてもよい。水平成分 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ は高さ $\frac{1}{2}l$ の位置に、鉛直成分 $\frac{1}{2}N$ は水平距離 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ の位置にはたらく。どちらもモーメントは $\frac{\sqrt{3}}{4}Nl$ であり、合計すると $\frac{\sqrt{3}}{2}Nl$ となる。

すると $0 \le x \le l$ に対して $R = 2mg - \frac{1}{2}N = mg\left(\frac{7}{4} - \frac{x}{2l}\right) > 0$ であり、下端は地面から離れない。はしごが滑らないのは $F \le \mu R$ が成り立つ限りであり、これは

$$\mu \;\ge\; \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}\,N}{4mg - N} = \frac{\sqrt{3}\,(l + 2x)}{7l - 2x}.$$

を意味する。この比は x について増加する。分子は増加し、正の分母は減少するからである。したがって、作業員が上るにつれて必要な摩擦力は単調に大きくなる。

小問 (i)

作業員が中点に達したとたんにはしごは滑る。よって最大静止摩擦（limiting friction）に達するのはちょうど $x = \frac{1}{2}l$ のときであり、F/R は x について増加するので、それより前には達しない。このとき $N = mg$、$F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$、$R = \frac{3}{2}mg$ であるから

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

小問 (ii)

すべての $x \in [0, l]$ に対して $F \leq \mu R$ が成り立てば、作業員は上端に到達できる。F/R は x について増加するので、最悪の場合は $x = l$ である。このとき $N = \frac{3}{2}mg$、$F = \frac{3\sqrt{3}}{4}mg$、$R = \frac{5}{4}mg$ であるから、摩擦係数（coefficient of friction）の最小値は

$$\mu = \frac{3\sqrt{3}/4}{5/4} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1.04.$$

検算

- はしごに誰もいないとき（$x = 0$）、式は $\mu \geq \sqrt{3}/7 \approx 0.247$ を与える。これは当然ながら両方の答えより小さい。
- 力をベクトルとして書き、$l = 1$、$m = 1$、$g = 9.8$ を 3 つのつり合いの式に数値的に代入すると、$N/mg = 1$ と $\frac{3}{2}$、および比 $F/R = 0.57735\ldots$ と $1.03923\ldots$ が再現される。また、はしごに沿った 101 か所の位置で F/R が増加していることも確かめられる。

よくある間違い

- 鉛直な壁の場合のように、斜面からの抗力を水平だとしてしまうこと。ここでは抗力は水平方向から $\frac{1}{6}\pi$ だけ上に傾いており、その上向き成分が R を小さくする。
- 鉛直方向に分解するときに作業員の重さを忘れ、$2mg$ ではなく $R + \frac{1}{2}N = mg$ としてしまうこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) は配置に関する小さな最適化問題である。荷重のあらゆる位置にわたって F/R の最悪の場合を求める必要がある。これは技術者が構造物にとって危険な荷重条件を見つける方法と同じである。条件 $F \leq \mu R$ を思い描くのに役立つのが**摩擦円錐**（cone of friction）である。地面からの抗力の合力は法線から角 $\arctan \mu$ 以内になければならず、必要な抗力がその円錐から外れた瞬間にはしごは滑る。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。