解答例

STEP III 1988、第 10 問

純粋数学 • 追跡曲線

> **STEP III 1988、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.5 節「グレイハウンドを追うグレイハウンド」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/pursuit.html

鍵となる考え方

動き回る 4 匹の犬を別々に追跡しようとしてはならない。この設定は中心のまわりの 4 分の 1 回転で変わらないので、犬たちは常に O を中心とする正方形の頂点にいる。正方形は縮みながら回転するが、正方形であることに変わりはない。これにより A の速度と直線 AO のなす角が一定に定まる。そして速度と動径のなす角が一定であることこそ、等角螺旋（equiangular spiral）$r = \lambda \mathrm{e}^{-k\theta}$ を生み出す条件なのである。

解答

犬たちは正方形の上にとどまる

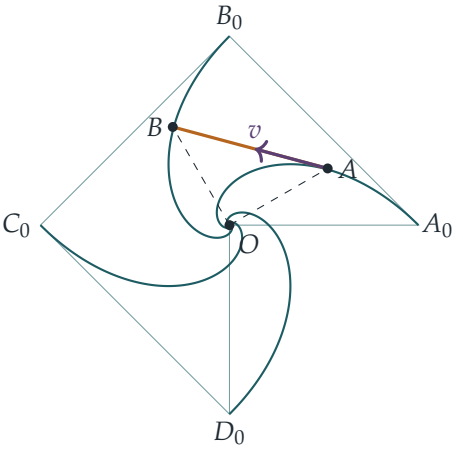
原点 O を正方形の中心にとり、犬に反時計回りに名前をつける。すなわち B は A から反時計回りに 4 分の 1 回転した位置にあり、C は B から同様の位置にあり、以下同様とする。

図全体を O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させる。A, B, C, D の出発位置は B, C, D, A の出発位置に移り、「速さ v で次の犬に向かってまっすぐ走る」という規則はどの犬にとっても同じ規則である。したがって、回転させた運動もまた、同じ初期配置から同じ規則に従う運動である。与えられた出発点からの運動は一意である（犬どうしが離れている間、速度は位置の滑らかな関数である）から、回転させた運動は実際の運動に一致する。言い換えれば、各瞬間において B の位置は A の位置を O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回

転させたものである。C と D についても同様である。よって $ABCD$ は常に O を中心とする正方形である。

速度と動径のなす角

A の極座標（polar coordinates）を (r,θ) とする。すると B は $(r,\theta+\frac{\pi}{2})$ にあるので、$OA=OB=r$ かつ $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ である。三角形 OAB は直角二等辺三角形であるから、$\angle OAB=\frac{\pi}{4}$ となる。



図は、出発点の頂点 A_0,B_0,C_0,D_0 から渦を巻いて内側へ向かう 4 本の経路と、ある瞬間の犬 A と B を示している。A の速度（紫）は AB の向きを向いている。

A の速度は大きさ v で AB の向きを向いており、これは内向きの動径 AO と角 $\frac{\pi}{4}$ をなす。速度を動径方向成分（外向きを正とする）と横断方向成分（θ が増加する向き）に分解すると、

$$\dot{r}=-v\cos\frac{\pi}{4},\qquad r\dot{\theta}=v\sin\frac{\pi}{4}.$$

B は A から見て反時計回りの側にあるので、A は反時計回りに引っ張られる。そのため横断方向成分は正である。

考えてみよう この 2 つの式を割り算してよいのはなぜか。

犬どうしが離れている間は $r\dot{\theta}=v/\sqrt{2}>0$ であるから、θ は時間について狭義単調増加である。したがって経路に沿うパラメータとして t の代わりに θ を用いることができ、連鎖律（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}=\frac{-v/\sqrt{2}}{v/(\sqrt{2}r)}=-r.$$

経路を求める

$r > 0$ であるから変数分離（separation of variables）ができる。$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\int \mathrm{d}\theta$ より $\ln r = -\theta + c$、すなわち

$$r = \lambda \mathrm{e}^{-\theta}$$

である。ただし $\lambda = \mathrm{e}^{c}$ は定数である。これが求める結果である。始線を OA_0 にとり、出発時に $\theta = 0$ となるようにすれば、λ は A の O からの最初の距離、すなわち一辺 a の正方形では $a/\sqrt{2}$ である。始線を別にとった場合も、λ が定数倍変わるだけである。（犬に時計回りに名前をつけた場合は、θ を時計回りに測れば同じ式が得られる。）

n 匹の犬への一般化

正 n 角形の頂点にいる n 匹の犬（反時計回りに名前をつけ、それぞれが次の犬を追う）についても、$\frac{2\pi}{n}$ の回転を用いて同じ議論が成り立つ。犬たちは常に O を中心とする正 n 角形をなす。よって A が (r,θ) にあれば、次の犬 B は $(r,\theta+\frac{2\pi}{n})$ にある。

三角形 OAB は頂角 $\frac{2\pi}{n}$ の二等辺三角形であるから、各底角は

$$\angle OAB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

先ほどと同様に A の速度を分解すると、

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

$n \geq 3$ より $\cos\frac{\pi}{n} > 0$ であるから、やはり θ は一様に増加し、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\frac{\pi}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \lambda\,\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}.$$

$n = 4$ のとき $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ であり、$r = \lambda\mathrm{e}^{-\theta}$ が再び得られる。各犬は等角螺旋（対数螺旋、logarithmic spiral）に沿って進み、すべての動径と一定の角 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ で交わる。

うれしい副産物がある。$\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ は一定であるから、犬たちは時間 $r_0/(v\sin\frac{\pi}{n})$ の後に O で出会う。ここで r_0 は O からの最初の距離である。その間に各犬が走る距離は有限の $r_0/\sin\frac{\pi}{n}$ である。$\theta \to \infty$ となり、犬は O のまわりを無限回まわるにもかかわらずである。（正方形の場合、これは一辺の長さ a に等しい。）

検算

- $n = 4$ の結果は、一般の公式で $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ とした特別な場合になっている。
- $n \to \infty$ のとき $\tan\frac{\pi}{n} \to 0$ であり、経路は円に近づく。各犬は円周上のほぼ真横にいる隣の犬を追いかけているからである。

- 追跡を数値的にシミュレーションした（$n = 3, 4, 5, 6, 8$ 匹の犬について、半径 1 から出発させ、RK4 を用いた）。計算された r は $\mathrm{e}^{-\theta\tan(\pi/n)}$ と相対誤差 10^{-11} で一致した。$n = 4$ の場合、$r = 0.02$ に達するまでの時間と経路の長さは $1.386 = 0.98\sqrt{2}$ となり、$(1 - 0.02)/\sin\frac{\pi}{4}$ による予測と一致した。

よくある間違い

- 犬たちが正多角形の上にとどまることを先に正当化せずに、$\dot{r}$ と $r\dot{\theta}$ を書き下してしまう。A における角が分かるのは、対称性の議論があるからである。
- 動径 AO と AB のなす角（$\frac{\pi}{4}$）ではなく、多角形の内角（正方形では $\frac{\pi}{2}$）を用いてしまう。
- 速度の横断方向成分が $\dot{\theta}$ ではなく $r\dot{\theta}$ であることを忘れる。

STEP のその先へ

これは古典的な**追跡問題**（*pursuit problem*）である。対称性の段階は、微分方程式（differential equations）における一般原理の一例である。すなわち、方程式と初期データがともにある対称性のもとで不変ならば、解の一意性により解もまた不変でなければならない。すべての動径と一定の角で交わる曲線は等角螺旋である。複素数で表すと $z = \mathrm{e}^{(-k+\mathrm{i})\theta}$ となるので、運動全体は平面の連続的な「回転相似（spiral similarity）」である。Needham の *Visual Complex Analysis*（邦題『ヴィジュアル複素解析』）はこの幾何学的な見方を展開しており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は解の存在と一意性を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。