解答例

STEP III 1988、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と評価

> **STEP III 1988、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q1

鍵となる考え方

グラフの概形については、因数 $x^2\mathrm{e}^{-x}$ が決して負にならないので、y の符号は $1+x$ だけで決まる。これに加えて、導関数を一度計算し、両端での振る舞いと $x=-1$ の近くでの振る舞いを調べれば、グラフの形全体がわかる。積分については、x^2 を $1+x$ で割るのが最もすっきりした方法である。そうすると被積分関数（integrand）の大部分は積分すると 0 になり、残った部分は二つの簡単な評価ではさみ込むのが容易である。

解答

グラフ

$f(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$ とおく。これは $x\neq -1$ であるすべての x で定義される。

符号と零点。 $x^2\geq 0$ かつ $\mathrm{e}^{-x}>0$ であるから、$x<-1$ では $f(x)<0$、$x>-1$ では $f(x)\geq 0$ であり、$f(x)=0$ となるのは $x=0$ のときだけである。因数 x^2 があるため、曲線は原点で x 軸を横切るのではなく、x 軸に接する。

漸近線と両端での振る舞い。

- $x\to -1$ のとき、分子は $\mathrm{e}>0$ に、分母は 0 に近づくので、$x=-1$ は垂直漸近線（vertical asymptote）であり、$x\to -1^-$ のとき $f\to -\infty$、$x\to -1^+$ のとき $f\to +\infty$ となる。
- $x\to +\infty$ のとき、指数関数はべき関数よりも速く増大するので、$f(x)\approx x\mathrm{e}^{-x}\to 0^+$ である。したがって $y=0$ は右側での漸近線であり、曲線は上から近づく。

- $x \to -\infty$ のとき、$\dfrac{x^2}{1+x} \approx x \to -\infty$ かつ $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$ であるから、$f(x) \to -\infty$ となり、その減少は非常に速い。

停留点。商の微分法（quotient rule）により、

$$f'(x) = \frac{(2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}(1+x) - x^2\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(2x + x^2 - x^3 - x^2\right)}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{x\left(2 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2}.$$

よって $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{2}$ のときである。因数 e^{-x} と $(1+x)^2$ は正であるから、f' の符号は $x(2 - x^2)$ の符号と一致する。

区間	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

これから次のことがわかる。

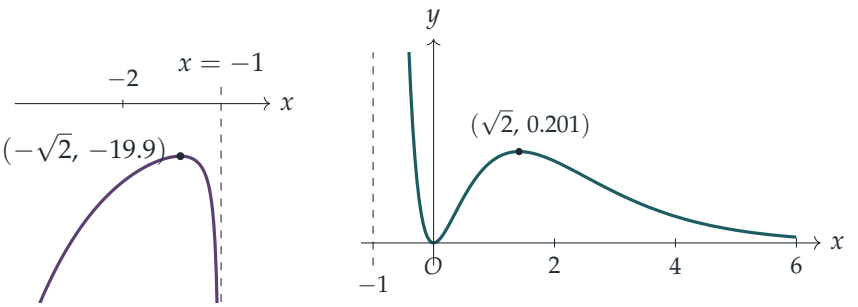
- $x = \sqrt{2}$ で極大（local maximum）となり、そのとき $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 0.201$ である。
- 原点で極小（local minimum）となる。
- 左側の枝の $x = -\sqrt{2}$ で極大となり、そのとき $y = \dfrac{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} = -2(\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}} \approx -19.9$ である。

考えてみよう 完全に軸より下にある枝が、どうして極大をもつことができるのだろうか？

$x < -1$ では、曲線は $x \to -\infty$ のときの $-\infty$ から上がってきて、漸近線 $x = -1$ のところで再び $-\infty$ へと下がっていく。したがって、その途中のどこかで向きを変えなければならない。最も高い点は $x = -\sqrt{2}$ にあり、それでも軸よりかなり下にある。この枝は、軸の下にぶら下がった、高さ約 -19.9 の逆さまの「こぶ」である。

右側では、曲線は $x = -1$ のすぐ右の $+\infty$ から原点の 0 まで下がり、$x = \sqrt{2}$ で小さな極大まで上がったあと、0 へと減衰していく。原点の近くでは下に凸（concave up）、極大点では上に凸（concave down）であるから、$x = \sqrt{2}$ の両側に変曲点（point of inflection）がある（数値的には $x \approx 0.35$ と $x \approx 2.5$ の付近である）。概形を描くだけなら、その正確な位置は必要ない。

二つの枝は縦方向のスケールがまったく異なるので、別々に描く。左側では y は約 -70 まで下がる。右側では、極大値 0.2 が見えるように y 方向のスケールを引き伸ばしてある。



積分

$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 \mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ とおく。x^2 を $1+x$ で割ると、

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

ここで $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$（$u = x$ として部分積分（integration by parts）を行う）、および $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ であるから、最初の二つの項の寄与は $1 - 1 = 0$ となり、

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

（三つの積分はいずれも収束（converge）するので、積分をこのように分けてよい。）

$x > 0$ では $0 < \dfrac{1}{1+x} < 1$ であるから、

$$0 < \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x} < \mathrm{e}^{-x} \qquad (x > 0).$$

この不等式は区間全体で等号なしで成り立ち、関数は連続であるから、積分しても等号なしの不等式のままである。

$$0 < I < \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

よって、求められていたとおり I は 0 と 1 の間にある。

別解。割り算を省くこともできる。$x > 0$ では $\dfrac{x^2}{1+x} < \dfrac{x^2}{x} = x$ であるから、$0 < f(x) < x\mathrm{e}^{-x}$ となり、$0 < I < \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ が得られる。それでも割り算の方法は知っておく価値がある。I が正確にどこから来るのかを示してくれるからである。

検算

- 無作為に選んだ 1000 個の点で f を数値的に微分した結果は、$f'(x) = x(2 - x^2)\mathrm{e}^{-x}/(1+x)^2$ と一致する。

- $[0, 60]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると $I \approx 0.59635$ が得られ、$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ からも同じ値が得られる。これは 0 と 1 の間に余裕をもって収まっている。
- 概形からの大まかな見積もり：$x > 0$ では、曲線は高さ約 0.2 のこぶであり、$x = 6$ までにはほとんど消えている。その高さと底辺をもつ三角形の面積は約 0.6 であり、0.596 と整合する。

よくある間違い

- $x = -\sqrt{2}$ の停留点（stationary point）が「もう一方の」枝にあるために見落とすこと、あるいはそこで y が負であるという理由で極小と判断してしまうこと。
- 曲線が原点で軸を横切ると述べること。二重の因数 x^2 のため、曲線は軸に接する。
- $\mathrm{e}^{-x} \le 1$ だけから $I < 1$ を主張すること。その評価から得られるのは $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$ であり、これは発散（diverge）する。

STEP のその先へ

I の値は $\mathrm{e}\,E_1(1) \approx 0.5963$ である。ここで $E_1(t) = \int_t^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{-1}\,\mathrm{d}u$ は指数積分（exponential integral）である。この数はゴンペルツ定数（Gompertz constant）として知られている。これは初等関数（elementary functions）を用いて表すことができず、そのためこの問題では評価だけが求められているのである。値を求められない積分を、値を求められる積分と比較することによって見積もるのは、解析学（analysis）における中心的な技能である（広義積分（improper integral）に対する「比較判定法（comparison test）」）。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）では、これが丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。