解答例

STEP II 1988、第 9 問

純粋数学 ・ 部分群と和集合

> **STEP II 1988、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q9

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.6 節「**部分群の和集合**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/subgroup-unions.html

鍵となる考え方

背理法（proof by contradiction）で示す。どちらの部分群（subgroup）も群全体でないとすると、G_2 だけに含まれる元と G_1 だけに含まれる元を一つずつ選び、その積がどこに属するかを考える。積と逆元（inverse）についての閉性（closure）から、積をどちらの部分群に入れても矛盾が生じる。部分群が三つあれば、積には行き場がもう一つある。試すべき自然な群は、すべての元が自分自身の逆元であるような群である。

解答

二つの部分群

G のすべての元が G_1 または G_2 に属するとし、矛盾を導くために $G_1 \neq G$ かつ $G_2 \neq G$ と仮定する。

$G_1 \neq G$ かつ $G_1 \subseteq G$ であるから、$a \notin G_1$ となる元 $a \in G$ が存在する。すべての元は G_1 または G_2 に属するので、$a \in G_2$ である。

同様に、$G_2 \neq G$ であるから $b \notin G_2$ となる元 $b \in G$ が存在し、このとき $b \in G_1$ である。

よって

$$a \in G_2, \quad a \notin G_1, \qquad\qquad b \in G_1, \quad b \notin G_2.$$

が成り立つ。ここで積 $ab \in G$ を考える。仮定より、これは G_1 または G_2 に属する。

- $ab \in G_1$ の場合：$b \in G_1$ であり G_1 は部分群であるから $b^{-1} \in G_1$ であり、したがって閉性より

$$a = (ab)\, b^{-1} \in G_1,$$

  となるが、これは $a \notin G_1$ に矛盾する。

- $ab \in G_2$ の場合：$a \in G_2$ であるから $a^{-1} \in G_2$ でもあり、したがって

$$b = a^{-1}(ab) \in G_2,$$

  となるが、これは $b \notin G_2$ に矛盾する。

どちらの場合も起こりえないので、仮定は誤りであった。すなわち $G_1 = G$ または $G_2 = G$ である。 ■

考えてみよう G が有限であることはどこで使ったか？

使っていない。この議論は部分群の性質（閉性と逆元の存在）だけを用いており、有限・無限を問わず任意の群で成り立つ。言い換えれば、群は決して二つの真部分群（proper subgroup）の和集合（union）にはならない。

三つの部分群

H をクラインの四元群（Klein four-group）

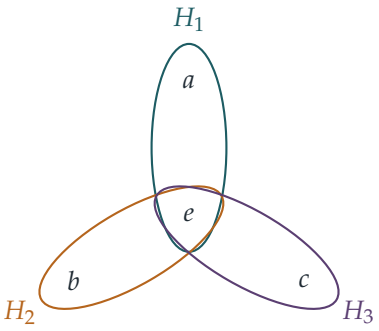
$$H = \{e,\, a,\, b,\, c\}, \qquad a^2 = b^2 = c^2 = e, \quad ab = ba = c,\; bc = cb = a,\; ca = ac = b.$$

とする。具体的には、H は各成分ごとに 2 を法とする加法を演算とする $\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ であり、また正方形でない長方形の対称変換群（恒等変換、二つの鏡映、半回転）でもある。

単位元（identity）以外のすべての元は位数（order）2 であるから、

$$H_1 = \{e,a\}, \qquad H_2 = \{e,b\}, \qquad H_3 = \{e,c\}$$

はいずれも部分群である。実際、どれも e を含み、積について閉じており（自明でない積は $a \cdot a = e$ だけであり、b と c についても同様）、各元は自分自身の逆元である。それぞれ元を 2 個しかもたないので、どれも H ではない。しかし、これらを合わせると e、a、b、c を含み、これは H のすべての元である。



このように、三つの真部分群で群を覆うことはできる。別の例として四元数群（quaternion group）$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ があり、これはいずれも位数 4 の三つの巡回部分群（cyclic subgroup）$\{\pm 1, \pm i\}$、$\{\pm 1, \pm j\}$、$\{\pm 1, \pm k\}$ の和集合である。

ここで最初の議論が破綻する理由に注目しよう。$a \notin H_2$ かつ $b \notin H_1$ のとき、積 $ab = c$ は三つ目の部分群 H_3 に逃げ込むことができるのである。

検算

- 位数 1 から 12 までの巡回群、S_3、S_4、位数 8 の二面体群（dihedral group）、Q_8、$\mathbb{Z}_2^2$、$\mathbb{Z}_2^3$ のすべての部分群について総当たりで調べたところ（真部分群の順序対は 1278 組）、和集合が群全体となる組は一つも見つからなかった。
- 同じ探索により、$\{e, a\} \cup \{e, b\} \cup \{e, ab\}$ がクラインの四元群全体であること、また Q_8 が $\langle i \rangle$、$\langle j \rangle$、$\langle k \rangle$ の和集合であることも確かめられる。興味深いことに、調べた巡回群のどれも、また S_3 も S_4 も、三つの真部分群の和集合にはならない。
- 前半についての簡単な確認：巡回群では、生成元（generator）はどの真部分群にも属さないので、巡回群はいくつの真部分群を用いても覆うことができない。

よくある間違い

- 個数を数えて論じる方法：二つの真部分群はそれぞれ高々 $\frac{1}{2}|G|$ 個の元をもつが、どちらも e を含むので、その和集合の元は高々 $|G| - 1$ 個である。この数え上げによる証明は（ラグランジュの定理（Lagrange's theorem）により）正しく簡潔であるが、有限性とラグランジュの定理の両方を必要とする。両方を明記すること。
- $a \notin G_1$ と $b \notin G_2$ を選んだのに、$a \in G_2$ と $b \in G_1$ を使い忘れること。この二つの事実がなければ矛盾は導けない。
- 真部分群でないものを含む三つの部分群や、そもそも部分群でないもの（たとえば

$ab = c$ であるため閉じていない $\{e, a, b\}$）を挙げてしまうこと。

STEP のその先へ

どのような群が三つの真部分群の和集合になるのだろうか。Scorza の定理（1926 年）がその答えを与える。それはちょうど、クラインの四元群と同型（isomorphic）な商群（quotient group）をもつ群であり、だからこそクラインの四元群が基本的な例なのである。同じ「二つの和集合にはならない」という事実は線形代数（linear algebra）にも現れ、無限体（infinite field）上のベクトル空間（vector space）は決して有限個の真部分空間（proper subspace）の和集合にはならない。群論の入門としては、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。