解答例

STEP II 1988、第 8 問

純粋数学 ・ 行列と固有ベクトル

> **STEP II 1988、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q8

鍵となる考え方

このモデルの 1 年分の変化は線形写像（linear map）であり、したがって 2×2 行列 M を掛けることにあたる。比がまったく変わらない個体数とは、M によって定数倍されるだけのもの、すなわち**固有ベクトル**（eigenvector）である。2 つの固有ベクトルが求まれば、どんな初期個体数もそれぞれの方向の成分に分解でき、各成分は毎年それぞれの固有値（eigenvalue）を掛けられるだけである。したがって長期的な行く末は、どちらの固有値が大きいか、そしてその前に付く係数の符号によって決まる。

解答

比が変わらない場合

個体数を列ベクトルで表すと、モデルの 1 年分は

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

となる。比 $A:B$ が変わらないのは、ある数 λ に対して $(A', B') = \lambda(A, B)$ となるとき、すなわち (A, B) が M の固有ベクトルであるときに限る。固有値は

$$\det(M - \lambda I) = \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\left(\tfrac{3}{2} - \lambda\right) + \tfrac{3}{8} = \lambda^2 - \tfrac{7}{4}\lambda + \tfrac{3}{4} = 0,$$

を満たすので、$4\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(4\lambda - 3) = 0$ となり、$\lambda = 1$ または $\lambda = \frac{3}{4}$ を得る。

- $\lambda = 1$ のとき：第 1 行から $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = A$ となるので $A = B$ である。比は 1 であり、このような個体数は毎年まったく同じままである。

▶ $\lambda = \frac{3}{4}$ のとき：第 1 行から $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B = \frac{3}{4}A$ となるので $A = \frac{3}{2}B$ である。比は $\frac{3}{2}$ である。第 2 行も確かめると $\frac{3}{2}B - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}B = \frac{3}{4}B$ となる。両方の種が毎年 $\frac{3}{4}$ 倍に減少する。

行列を使わずに同じことを示すこともできる。$A = rB$ とすると新しい比は $\dfrac{\frac{1}{4}r + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}r}$ であり、これを r に等しいとおくと $2r^2 - 5r + 3 = 0$ となるので、$r = 1$ または $r = \frac{3}{2}$ である。いずれにせよ、比が一定に保たれるのはそれが 1 または $\frac{3}{2}$ のときに限られ、これが示すべきことであった。以下 $x = 1$、$y = \frac{3}{2}$ とする。

その後の年

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

と書く。成分を比較すると $p + \frac{3}{2}q = a$、$p + q = b$ である。辺々引くと $\frac{1}{2}q = a - b$ となるので

$$q = 2(a-b), \qquad p = b - q = 3b - 2a.$$

である。M は線形なので、1 年後には第 1 の成分は 1 倍、第 2 の成分は $\frac{3}{4}$ 倍される。n 年後には（モデルが適用できる限り）

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (3b-2a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2(a-b)\left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

すなわち

$$a_n = (3b-2a) + 3(a-b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = (3b-2a) + 2(a-b)\left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

となる。$(\frac{3}{4})^n \to 0$ であるから、個体数は $(3b-2a,\, 3b-2a)$ に近づく。これは平衡点（equilibrium）の集まりである直線 $a = b$ 上の点である。

分類の前に 1 つ安心材料を述べておく。ツチブタが問題を起こすことはない。$a_n \geq 0$ かつ $b_n > 0$ ならば $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n > 0$ であるから、バッファローが生き残っている間はツチブタも正のままである。したがって注意すべきは b_n の符号だけであり、平面の領域 $a \geq 0$、$b > 0$ で考えればよい。

考えてみよう b_n がしばらくの間負になり、その後回復して正の極限に向かうということはありうるだろうか？

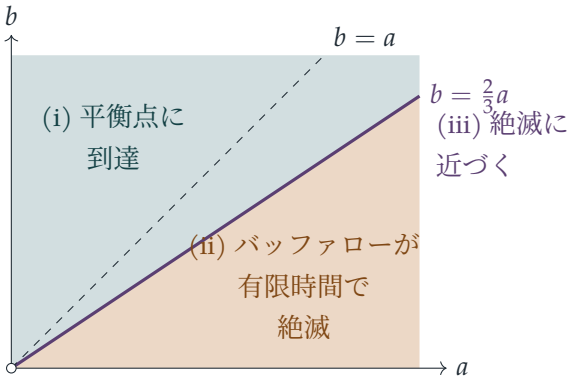
ありえない。b_n の式の中で n に依存するのは $(\frac{3}{4})^n$ だけであり、これは 1 から 0 へと単調に減少する。したがって b_n は $b_0 = b$ からその極限 $3b - 2a$ へと単調に動き、すべての b_n は b と $3b - 2a$ の間にある。これにより分類が明快になる。

3つの領域

(i) $3b-2a>0$、すなわち $b>\frac{2}{3}a$ ならば、b と $3b-2a$ はともに正であるから、すべての b_n は正であり、モデルはいつまでも適用できる。個体数は平衡点 $(3b-2a,\,3b-2a)$ に収束（converge）し、これは零ではない。これは直線 $b=\frac{2}{3}a$ より上の領域である（b 軸 $a=0$ を含む）。

(ii) $3b-2a<0$、すなわち $b<\frac{2}{3}a$ ならば、$a>\frac{3}{2}b>b$ であるから $a-b>0$ であり、b_n は負の数 $3b-2a$ に向かって狭義単調に減少する。よってある有限の n で $b_n\le 0$ となる。すなわちバッファローは有限時間で絶滅する。これは直線 $b=\frac{2}{3}a$ と a 軸の間の領域である。

(iii) $3b-2a=0$、すなわち $a>0$ で $b=\frac{2}{3}a$ ならば、$p=0$ であり、個体数は $(\frac{3}{2},1)$ の純粋な定数倍となる。$b_n=b\,(\frac{3}{4})^n$ はすべての n で正であるが 0 に近づく。バッファロー（とツチブタ）は絶滅に近づくが、決して絶滅には至らない。これは半直線 $b=\frac{2}{3}a$、$a>0$ だけである。



破線 $b=a$ はすでに平衡状態にある個体数からなる。領域 (i) のどの初期点もこの直線に向かって、直線 $b=\frac{2}{3}a$ に平行に滑るように動く（$(\frac{3}{2},1)$ 方向の成分は縮んで消え、$(1,1)$ 成分は一定のまま保たれる）。

検算

- $n=0$ のとき、式から $a_0=3b-2a+3a-3b=a$、$b_0=3b-2a+2a-2b=b$ となり、当然そうなるべき結果である。
- 領域 (i) にある $(a,b)=(1,3)$ から始める。モデルの 1 年分で $(\frac{1}{4}+\frac{9}{4},\,\frac{9}{2}-\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},4)$ となり、式からは $7-6(\frac{3}{4})=\frac{5}{2}$ と $7-4(\frac{3}{4})=4$ が得られる。極限は $(7,7)$ である。
- コンピュータでランダムな 3000 個の初期点からモデルを（分数で）厳密に反復計

算し、閉じた式が 40 年分正しいこと、そして $3b-2a$ の符号がすべての場合に結果を正しく予測することを確認した。$b=\frac{2}{3}a$ 上の点も含めてであり、たとえば $(3,2)$ は 5 年後に $\left(\frac{729}{1024},\frac{243}{512}\right)$ となり、これは初期値の $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ 倍である。

よくある間違い

- 比を逆にしてしまうこと。問題はツチブタとバッファローの比を求めているので、値は 1 と $\frac{2}{3}$ ではなく 1 と $\frac{3}{2}$ である。
- $b_n \le 0$ となるとモデルが停止することを忘れ、負の「極限」をもつものも含めて、すべての個体数が $(3b-2a, 3b-2a)$ に近づくと主張してしまうこと。
- 領域 (iii) を面積をもつ領域として記述すること。これは (i) と (ii) の境界である半直線 $b=\frac{2}{3}a$ にすぎない。

STEP のその先へ

これは離散線形力学系（discrete linear dynamical system）であり、この方法（対角化（diagonalise）し、各固有値を n 乗する）は、大学 1 年の線形代数で M^n を計算する方法そのものである。固有値 1 は不動点の直線を与え、固有値 $\frac{3}{4}<1$ は減衰する方向を与える。時間を連続にし、λ^n の代わりに $e^{\lambda t}$ を用いれば、同じ描像が線形微分方程式の連立系を支配する。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）には差分方程式と行列の累乗についての良い章があり、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は連続版を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。