解答例

STEP II 1988、第 7 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP II 1988、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s2-q7

鍵となる考え方

ここでの等式はどれも置換（substitution）によるもので、難しいのは正しい置換を見つけることである。最初の段階では、$[1,2]$ を $[0,1]$ に移し、しかも $2-2x+x^2$ を $1+t^2$ を含む式に変える置換が必要になる。メビウス（Möbius）写像 $x=2/(1+t)$ がまさにそれを実現する。$1+t^2$ が現れれば、$t=\tan\theta$ とおくのは自然な一手である。θ についての被積分関数（integrand）は $\theta=\frac{1}{8}\pi$ に関して対称（symmetric）であり、半分の区間で $t=\tan\theta$ の置換を元に戻すと $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$ が現れる。最後の導出では、同じ置換を逆向きに用いる。

解答

以下を通して、k は任意の実数の定数とする。累乗の底となる式はいずれも考える範囲で正であるから、指数が整数でなくても問題は生じない。

$[1,2]$ から $[0,1]$ へ

$x=\dfrac{2}{1+t}$ とおく。すると $x=1$ のとき $t=1$、$x=2$ のとき $t=0$ であり、$\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ である。このとき

$$2-2x+x^2=\frac{2(1+t)^2-4(1+t)+4}{(1+t)^2}=\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2},\qquad x^{k+1}=\frac{2^{k+1}}{(1+t)^{k+1}}.$$

よって被積分関数は

$$\frac{2^k(1+t^2)^k}{(1+t)^{2k}}\cdot\frac{(1+t)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}},$$

となり、$\mathrm{d}x$ の負の符号によって積分範囲が $\int_1^0$ から $\int_0^1$ に入れ替わる。

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t.$$

三角関数による表示

次に $t = \tan\theta$ とおき、θ は 0 から $\frac{1}{4}\pi$ まで動くとする。すると $1+t^2 = \sec^2\theta$、$\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、

$$1+t = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)}{\cos\theta},$$

である。ここで $\cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi\cos\theta+\sin\frac{1}{4}\pi\sin\theta\right)$ を用いた。被積分関数は

$$\begin{aligned}\sec^{2k}\theta\cdot\frac{\cos^{k+1}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}\cdot\sec^2\theta &= \frac{\cos^{-(k+1)}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}\\ &= \frac{1}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}},\end{aligned}$$

となる。$\cos\theta$ の指数の合計が $-2k+(k+1)-2 = -(k+1)$ となるからである。2 つの余弦はどちらも $[0,\frac{1}{4}\pi]$ で正であるから、これはすべての実数 k に対して成り立つ。以上で I の 2 番目の表示が得られた。

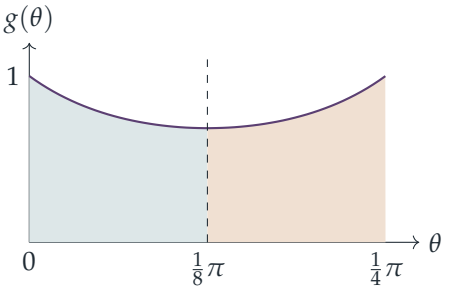
> **考えてみよう** $[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上の積分が $[0,\frac{1}{8}\pi]$ 上の積分の 2 倍になるのはなぜだろうか。

θ についての被積分関数を $g(\theta)$ と書く。θ を $\frac{1}{4}\pi-\theta$ に置き換えると、2 つの因子 $\cos\theta$ と $\cos(\frac{1}{4}\pi-\theta)$ が入れ替わるだけであるから、$g(\frac{1}{4}\pi-\theta) = g(\theta)$ である。つまり g のグラフは $\theta = \frac{1}{8}\pi$ に関して対称である。（このことは直接確かめることもできる。$\sqrt{2}\cos\theta\cos(\frac{1}{4}\pi-\theta) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\cos(2\theta-\frac{1}{4}\pi))$ であり、これは θ と $\frac{1}{8}\pi$ の距離だけで決まる。）形式的には、$\phi = \frac{1}{4}\pi-\theta$ と置換して

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/8} g(\tfrac{1}{4}\pi-\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/8} g(\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

となるので、$[0,\frac{1}{4}\pi]$ の 2 つの半分は等しく寄与し、

$$I = 2\int_0^{\pi/8} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left[\sqrt{2}\cos\theta\cos\left(\frac{1}{4}\pi-\theta\right)\right]^{k+1}}.$$



図は $k=1$ のときの g を示している。影をつけた 2 つの半分は互いに鏡像になっている。

したがって $\sqrt{2}-1$ までの積分

ここで $[0, \frac{1}{8}\pi]$ 上で置換 $t=\tan\theta$ を逆向きにたどる。上の計算の各段階はそのまま成り立ち、変わるのは上端だけで、それは $t=\tan\frac{1}{8}\pi$ に移る。$\tau=\tan\frac{1}{8}\pi$ として $\tan\frac{1}{4}\pi=\dfrac{2\tau}{1-\tau^2}=1$ から $\tau^2+2\tau-1=0$ が得られ、$\tau=-1\pm\sqrt{2}$ となる。正の解をとって $\tan\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$ である。したがって

$$I=2\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t,$$

となり、示すべき式が得られた。これを同じ被積分関数による $I=\int_0^1$ と比べると、$[0,\sqrt{2}-1]$ 上の積分と $[\sqrt{2}-1,1]$ 上の積分が**どちらも** $\frac{1}{2}I$ に等しいことがわかる。次にこの事実を用いる。

導出

左辺。 $u=x^2$ として $\dfrac{2-2x^2+x^4}{x^2}=\dfrac{2-2u+u^2}{u}$ と書く。すると $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$ より $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$ であり、u は 1 から 2 まで動く。

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{2-2x^2+x^4}{x^2}\right)^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(2-2u+u^2)^k}{u^k}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I.$$

右辺。 被積分関数は $\dfrac{(2-2x+x^2)^k}{x^{k+1}}$ であり、I の定義と同じであるが、積分範囲は $[1,\sqrt{2}]$ である。再び最初の置換 $x=2/(1+t)$ を用いる。今度は $x=\sqrt{2}$ が $1+t=\sqrt{2}$、

すなわち $t = \sqrt{2} - 1$ に対応するので、

$$\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2 - 2x + x^2}{x}\right)^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}-1}^{1} \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$$
$$= I - \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{(1+t^2)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t = I - \tfrac{1}{2}I = \tfrac{1}{2}I.$$

両辺とも $\frac{1}{2}I$ に等しいので両辺は等しく、これが示すべき結果である。

検算

- $k = 0$：$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$ であり、最後の恒等式の両辺はともに $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$ となり、確かに一致する。
- $k = 1$：$I = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right)\mathrm{d}x = 2 - 2\ln 2 \approx 0.61371$ である。I の 5 つの表示すべてと、最後の恒等式の両辺にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 10 位まで一致する（各辺は ≈ 0.30685）。$k = 0.5$、$k = -0.7$、$k = 4.3$ のように、k が整数でない場合や負の場合にも同様に一致する。

よくある間違い

- $\cos\theta + \sin\theta$ を 1 つの余弦で表すときに因子 $\sqrt{2}$ を忘れ、余計な $2^{(k+1)/2}$ が残ってしまう。
- I の値を求めようとしてしまう。一般の k に対しては閉じた形（closed form）の値は存在せず、その必要もない。どの段階も変数変換か対称性によるものである。
- 導出において、右辺が I の**一部**にすぎず、仕上げるには「これより（hence）」で示した結果が必要であることを見落とす。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto 2/(1+t)$ はメビウス変換（一次分数変換、fractional linear transformation）である。これらの写像は円と直線を円と直線に移し、2 次式から作られる被積分関数に対する自然な変数変換となっている。ここでの $\theta \mapsto \frac{1}{4}\pi - \theta$ のように被積分関数に隠れた対称性を見抜くことは、初等的な原始関数（antiderivative）をもたない定積分（definite integral）を計算するための定番の技法である。メビウス変換についてさらに知るには、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を読むとよい。この種の積分をさらに多く見たければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。