解答例

STEP II 1988、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲線関数の不等式

> **STEP II 1988、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q6

鍵となる考え方

3 つの関数はいずれも $x = 0$ で値が 0 であるから、$x > 0$ で増加（increasing）であることを示せば十分である。導関数（derivative）は各小問が次の小問につながるように仕組まれている。すなわち、(ii) の導関数には (i) の関数が現れ、(iii) の導関数は (ii) の関数を定数倍・変数変換したものになっている。f については、対数微分（logarithmic differentiation）によって f′ の符号の問題が (iii) の関数の符号の問題に帰着される。(iii) が明らかにそのために用意されていたことがわかる。

解答

全体を通して、$F(0) = 0$ かつすべての $x > 0$ に対して $F'(x) > 0$ ならば、すべての $x > 0$ に対して $F(x) > 0$ である、という原理を用いる。（平均値の定理（mean value theorem）により、ある $\xi \in (0, x)$ が存在して $F(x) = F(x) - F(0) = xF'(\xi)$ となるからである。）

小問 (i)

$g(x) = x - \tanh x$ とおく。このとき $g(0) = 0$ であり、

$$g'(x) = 1 - \operatorname{sech}^2 x = \tanh^2 x$$

である。ここで $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ を用いた。$x > 0$ では $\tanh x > 0$ であるから $g'(x) > 0$ である。よって $x > 0$ において $x - \tanh x > 0$ である。

小問 (ii)

$h(x) = x\sinh x - 2\cosh x + 2$ とおく。このとき $h(0) = 0 - 2 + 2 = 0$ であり、

$$h'(x) = \sinh x + x\cosh x - 2\sinh x = x\cosh x - \sinh x = \cosh x\,(x - \tanh x)$$

である。$x > 0$ では $\cosh x > 0$ であり、小問 (i) より $x - \tanh x > 0$ であるから、$h'(x) > 0$ である。よって $x > 0$ において $h(x) > 0$ である。

小問 (iii)

$k(x) = 2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x$ とおく。このとき $k(0) = 0$ であり、

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2\cosh 2x + 4x\sinh 2x - 6\cosh 2x + 4 \\ &= 4x\sinh 2x - 4\cosh 2x + 4. \end{aligned}$$

考えてみよう この組み合わせは以前どこで見たか？

$u = 2x$ とおくと、これは $2u\sinh u - 4\cosh u + 4 = 2\,(u\sinh u - 2\cosh u + 2) = 2h(u)$ である。したがって、$2x > 0$ であるから小問 (ii) により

$$k'(x) = 2h(2x) > 0 \quad \text{ただし} x > 0$$

が成り立つ。よって $x > 0$ において $k(x) > 0$ である。

f には停留点がない

$x > 0$ では $\mathrm{f}(x)$ を構成する因数はすべて正であるから、$\mathrm{f}(x) > 0$ であり、対数をとることができる：

$$\ln \mathrm{f}(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cosh x - \ln\sinh x.$$

微分すると、

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\sinh x}{3\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x}{3x\sinh x\cosh x}.$$

次に、$\sinh x\cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x$、$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$、$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$ を用いて、分子を 2 倍角（double angle）の式で表す：

$$\begin{aligned} 3\sinh x\cosh x + x\sinh^2 x - 3x\cosh^2 x &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x + \tfrac{x}{2}(\cosh 2x - 1) - \tfrac{3x}{2}(\cosh 2x + 1) \\ &= \tfrac{3}{2}\sinh 2x - x\cosh 2x - 2x \\ &= -\tfrac{1}{2}(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x). \end{aligned}$$

したがって

$$f'(x) = -\frac{f(x)\,(2x\cosh 2x - 3\sinh 2x + 4x)}{6x\sinh x\cosh x}.$$

$x > 0$ では、小問 (iii) より括弧内は正であり、$f(x)$、x、$\sinh x$、$\cosh x$ はいずれも正である。よってすべての $x > 0$ に対して $f'(x) < 0$ である。f' は決して 0 にならないので、f には停留点（turning point）がなく、実際 f は $x > 0$ で狭義単調減少（strictly decreasing）である。

グラフの概形

両端での振る舞いを調べる必要がある。

$x \to 0^+$ のとき： $x/\sinh x \to 1$ かつ $(\cosh x)^{1/3} \to 1$ であるから、$f(x) \to 1$ である。より詳しくは、$(\cosh x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ かつ $x/\sinh x = 1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ であるから、x^2 の項は打ち消し合う。それぞれの級数をもう 1 項ずつ計算すると

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{45}x^4 + O(x^6)$$

が得られる。したがって曲線は（除外された）点 $(0,1)$ から傾き 0 で、非常に平らに出発する。

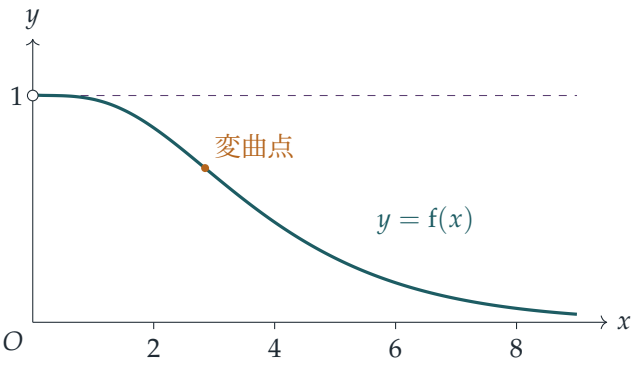
$x \to \infty$ のとき： $\cosh x \sim \frac{1}{2}e^x$ かつ $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$ であるから、

$$f(x) \sim \frac{x\,(\frac{1}{2}e^x)^{1/3}}{\frac{1}{2}e^x} = 2^{2/3}\,x\,e^{-2x/3} \to 0$$

である。指数関数は x のべきに勝るからである。x 軸は漸近線（asymptote）であり、$f > 0$ であるから曲線は常にその上側にある。

> **考えてみよう** 曲線は平らに始まり平らに終わるが、常に減少している。このことから何が必然的に導かれるか？

0 の近くでは曲線は上に凸である（$1 - x^4/45$ の形をしている）。一方、x が大きいところでは減衰する指数関数であり、下に凸である。したがって、その間に少なくとも 1 つの変曲点（point of inflection）が存在しなければならない。数値計算によれば変曲点はちょうど 1 つあり、$x \approx 2.85$ 付近、$f \approx 0.68$ のところにある。いくつかの値を挙げておく：$f(1) \approx 0.983$、$f(2) \approx 0.858$、$f(4) \approx 0.441$、$f(6) \approx 0.174$。



検算

- $x = 1$ において：$1 - \tanh 1 \approx 0.238$、$\sinh 1 - 2\cosh 1 + 2 \approx 0.089$、$2\cosh 2 - 3\sinh 2 + 4 \approx 0.643$ であり、いずれも正である。
- 恒等式（identity）$\mathrm{f}'/\mathrm{f} = -k(x)/(6x\sinh x\cosh x)$ は任意の点で確かめられる。$x = 1$ では両辺ともおよそ -0.0592 であり、f の数値微分とも一致する。
- 数値計算によれば、小さい x に対して $(1 - \mathrm{f}(x))/x^4 \approx 0.0222 \approx \frac{1}{45}$ であり、大きい x に対して $\mathrm{f}(x)/(2^{2/3}xe^{-2x/3}) \to 1$ である。

よくある間違い

- 導関数が正であることだけを示し、関数が $x = 0$ で 0 になることの確認を忘れる。両方が必要である。
- 商の微分法（quotient rule）と積の微分法（product rule）を使って f を直接微分しようとする。それでも計算はできるが、対数微分のほうがはるかに見通しがよく、(iii) とのつながりも見えやすい。
- 曲線が x 軸と交わるように描いたり、原点から出発するように描いたりする。曲線は高さ 1 から（その値はとらずに）出発し、常に正である。

STEP のその先へ

$F(0) = 0$ と $F' > 0$ から $F(x) > 0$ を示す手法は平均値の定理の応用そのものであり、それを（ここでの k'、h'、g' のように）連鎖的に用いることは、解析学において関数の間の不等式を証明する標準的な方法である。展開 $\mathrm{f}(x) = 1 - x^4/45 + \cdots$ はべき級数（power series）の操作の一端に触れるものであり、大学 1 年次の解析学ではこれが

厳密に基礎づけられる。両者について学ぶのによい本として、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。