解答例

STEP II 1988、第 5 問

純粋数学 • 1 の冪根と正接

> **STEP II 1988、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q5

鍵となる考え方

$z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ とおき、二項定理（binomial theorem）を用いて z^7 を展開する。その虚部（imaginary part）は $\sin 7\theta$ であり、これを $\cos^7\theta$ で割ると $t = \tan\theta$ の多項式（polynomial）になる。1 の 7 乗根（seventh roots of unity）は $\sin 7\theta$ を 0 にするので、7 次多項式の 7 個の根（root）がそのまま手に入る。あとは、正接の積は根の積にほかならず、定数項（constant term）から読み取れる。

解答

6 次方程式の根

ド・モアブル（de Moivre）の定理より、$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta$ である。$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。左辺を二項定理で展開し、$\mathrm{i}s$ の奇数乗を含む項だけを取り出すと

$$\sin 7\theta = 7c^6 s - 35c^4 s^3 + 21c^2 s^5 - s^7.$$

$\cos\theta \neq 0$ であれば c^7 で割ることができ、$t = \tan\theta$ とおくと

$$\frac{\sin 7\theta}{\cos^7\theta} = 7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7 = -t\,(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7). \qquad (*)$$

$z^7 = 1$ の根は $\theta = \frac{2k\pi}{7}$ に対する $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ であり、これらに対しては $z^7 = 1$ の虚部をとって $\sin 7\theta = \sin 2k\pi = 0$ となる。$\theta = \frac{k\pi}{7}$（$k = 0, 1, \ldots, 6$）を用いる方が少しすっきりする。この場合も $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ となり、しかも tan は周期（period）π をもつので、得られる正接の値の集合は同じである。

これらの各 θ について、

- $\frac{k\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$ となるには $2k = 7$ が必要なので、$\cos\theta \neq 0$ である。よって $(*)$ が成り立つ。
- $\sin 7\theta = 0$ なので、$(*)$ より数 $t = \tan\frac{k\pi}{7}$ は $p(t) = t^7 - 21t^5 + 35t^3 - 7t$ の根である。

7 個の値 $\tan\frac{k\pi}{7}$（$k = 0, \ldots, 6$）は互いに異なる。実際、角 $0, \frac{\pi}{7}, \ldots, \frac{6\pi}{7}$ は $[0, \pi)$ の相異なる点で、どれも $\frac{\pi}{2}$ に等しくない。そして tan は $[0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ 上で一対一（one-to-one）である（$[0, \frac{\pi}{2})$ では正で増加し、$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ では負でやはり増加し、二つの部分はそれぞれ $[0, \infty)$ と $(-\infty, 0)$ の値をとる）。

考えてみよう 根の一部だけでなく、すべての根を見つけたと、どうしてわかるのか。

7 次多項式の根は高々 7 個である。相異なる根を 7 個見つけたのだから、それらがすべてである。$k = 0$ は $t = 0$ を与え、これは因数 t に由来する根である。したがって $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0$ の根はちょうど

$$t = \tan\frac{k\pi}{7}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

であり、$\tan\frac{(7-k)\pi}{7} = -\tan\frac{k\pi}{7}$ であるから、これは $\pm\tan\frac{\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{2\pi}{7}$、$\pm\tan\frac{3\pi}{7}$ のことである。

積 $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}$

偶数次のモニック多項式（monic polynomial）では、根の積は定数項に等しい。よって

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{2\pi}{7}\right)\left(\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)\left(-\tan\tfrac{3\pi}{7}\right) = -7,$$

すなわち

$$\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\tan\tfrac{2\pi}{7}\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)^2 = 7.$$

3 つの角はいずれも $(0, \frac{\pi}{2})$ にあるので、各正接は正であり、積は正の平方根である：$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$。

ここで $\tan(\pi - x) = -\tan x$ を用いると、$\tan\frac{4\pi}{7} = -\tan\frac{3\pi}{7}$、$\tan\frac{6\pi}{7} = -\tan\frac{\pi}{7}$ である。2 つの負号は打ち消し合うので

$$\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} = \tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\tan\frac{\pi}{7} = \sqrt{7},$$

となり、示すべき式が得られた。

$n = 9$ と $n = 11$ の場合

同じ議論は任意の奇数 $n = 2m + 1$ で通用する。$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ の虚部をとり、$\cos^n\theta$ で割ると

$$\frac{\sin n\theta}{\cos^n\theta} = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{n}{2r+1}t^{2r+1} = t\,q_n(t),$$

となる。ここで q_n は次数 $2m = n-1$、最高次係数（leading coefficient）$(-1)^m$、定数項 $\binom{n}{1} = n$ の多項式である。具体的には

$$q_9(t) = t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9,$$
$$q_{11}(t) = -t^{10} + 55t^8 - 330t^6 + 462t^4 - 165t^2 + 11.$$

先ほどとまったく同様に（n は奇数なので、どの $\frac{k\pi}{n}$ も $\frac{\pi}{2}$ に等しくない）、q_n の根は $n-1$ 個の相異なる数 $\tan\frac{k\pi}{n}$（$k = 1, \ldots, n-1$）であり、これらは $k = 1, \ldots, m$ に対する $\pm\tan\frac{k\pi}{n}$ として対になる。次数が偶数なので、q_n の根の積は（定数項）/（最高次係数）である：

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{m} \tan^2\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{(-1)^m} \quad \Longrightarrow \quad \prod_{k=1}^{m} \tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n},$$

ここで、これらの角はすべて $(0, \frac{\pi}{2})$ にあるので正の根をとった。$n = 9$ では、これは q_9 の定数項 9 を最高次係数 1 で割ったものである。$n = 11$ では $11/(-1) = -11 = (-1)^5 \prod \tan^2$ となる。いずれにせよ、$k = 1, \ldots, m$ にわたる $\tan\frac{k\pi}{n}$ の積は、$n = 9$ のとき 3、$n = 11$ のとき $\sqrt{11}$ である。

> **考えてみよう** 求める積の角は $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots$ ではなく $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots$ である。一方から他方へどう移ればよいか。また、符号はどうなるか。

偶数 $2j \le m$ はそれぞれ、すでに $1, \ldots, m$ の中にある。偶数 $2j > m$（すなわち $2j > \frac{n}{2}$）は $\tan\frac{2j\pi}{n} = -\tan\frac{(n-2j)\pi}{n}$ を与え、$n-2j$ は奇数で m 以下である。偶数は前者から、奇数は後者から得られるので、1 から m までの各数はこの方法でちょうど 1 回ずつ現れる。よって求める積は $\pm\sqrt{n}$ であり、$\frac{n}{2}$ と n の間にある偶数 1 個につき負号が 1 つ付く。

- $n = 9$：偶数は $2, 4, 6, 8$ で、4.5 より大きいものは $6, 8$ であるから、負号は 2 つ。よって
$$\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{6\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} = \sqrt{9} = 3.$$
- $n = 11$：偶数は $2, 4, 6, 8, 10$ で、5.5 より大きいものは $6, 8, 10$ であるから、負号は 3 つ。よって
$$\tan\frac{2\pi}{11}\tan\frac{4\pi}{11}\tan\frac{6\pi}{11}\tan\frac{8\pi}{11}\tan\frac{10\pi}{11} = -\sqrt{11}.$$

（$n = 7$ では 3.5 より大きい偶数は 4, 6 で負号は 2 つであり、だからこそあの積は正になったのである。）

検算

- $n = 9$ には簡単な部分的検算がある：$\tan\frac{6\pi}{9} = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ であり、数値的には $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9} \approx 0.8391 \times 5.6713 \times (-0.3640) \approx -1.732 = -\sqrt{3}$ となるので、

全体で 3 となる。

- 電卓で計算すると $\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7} \approx 2.645751$、$\sqrt{7} \approx 2.645751$ である。$n = 11$ の積は $\approx -3.316625 = -\sqrt{11}$ である。
- $\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$ を代入すると、当然ながら $t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 \approx 0$ となる。

よくある間違い

- $\cos^7\theta$ が 0 でないことを確かめずに割ってしまう、あるいは 7 個の正接が互いに異なることを論じない。これらの点がなければ、**すべて**の根を見つけたことを示したことにはならない。
- $n = 11$ で符号を誤る：積の 2 乗は簡単だが、符号を決めるには負の正接の個数を数える必要がある。
- $a_d t^d + \cdots + a_0$ の根の積が $(-1)^d a_0/a_d$ であることを忘れる。これは最高次係数が -1 である $n = 11$ で効いてくる。

STEP のその先へ

数 $\tan\frac{k\pi}{n}$ は代数的数（algebraic number）であり、多項式 q_n は（n が素数のとき）有理数体上でのそれらの最小多項式（minimal polynomial）である。$\prod\tan\frac{k\pi}{n} = \sqrt{n}$ のような恒等式は、ガウス（Gauss）和（Gauss sum）の影である。ガウス和は、$\sqrt{\pm p}$ が 1 の p 乗根によって生成される体（field）に属することを示すもので、代数的整数論（algebraic number theory）の礎石の一つである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）はこの一連の考え方へのやさしい入り口であり、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は 1 の冪根を幾何的に感じ取らせてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。