解答例

STEP II 1988、第 4 問

純粋数学 • 複素数平面上の軌跡

> **STEP II 1988、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q4

鍵となる考え方

複素数（complex number）を $a+\mathrm{i}b$ と書き、「実数である」あるいは「虚数である」という条件を a と b についての一つの実数の方程式に直す。するとアルガン図（Argand diagram）上のなじみのある曲線が得られる。次に、2 乗することを平面から平面への写像とみなし、x と y（あるいは p と q）を a と b で表して消去することにより、その曲線がどこに移されるかを求める。

問題文について一言注意しておく。問題文には w^2-2x とあるが、この時点で x はまだ導入されておらず、最後の小問（t^2-2t を含むもの）を見れば意図された条件がわかる。そこでここでは、これを**w^2-2w が実数である**と読むことにする。

解答

小問 (i)

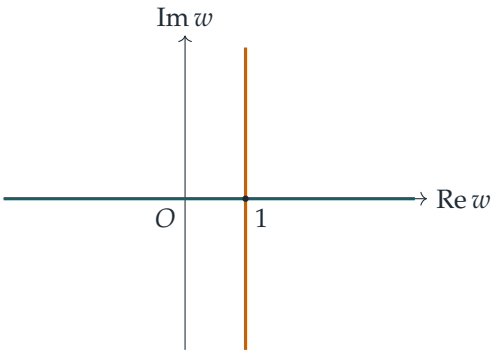
a, b を実数として $w=a+\mathrm{i}b$ とおく。すると

$$w^2-2w=(a^2-b^2-2a)+\mathrm{i}\,(2ab-2b)=(a^2-b^2-2a)+2\mathrm{i}\,b(a-1).$$

これが実数となるのは虚部が 0 になるとき、すなわち

$$b(a-1)=0, \qquad \text{すなわち} \qquad b=0 \ \text{または}\ a=1.$$

のときであり、かつそのときに限る。したがって w の軌跡（locus）は、実軸と垂直な直線 $\mathrm{Re}\,w=1$ を合わせたものである。2 本の直線は $w=1$ で交わる。



小問 (ii)

2 本の直線をそれぞれ別々に 2 乗する。

実軸。 $b = 0$ ならば $w = a$ は実数で、$w^2 = a^2$ である。よって $y = 0$ かつ $x = a^2 \geq 0$ であり、a が実数全体を動くとき、a^2 は $[0, \infty)$ のすべての値をとる。軌跡のこの部分は x 軸の非負の部分、すなわち半直線（half-line）$y = 0$、$x \geq 0$ である。

直線 $a = 1$。 $w = 1 + \mathrm{i}b$ ならば

$$w^2 = 1 - b^2 + 2\mathrm{i}b, \qquad \text{よって} \qquad x = 1 - b^2, \quad y = 2b.$$

$b = \frac{1}{2}y$ を用いて消去すると

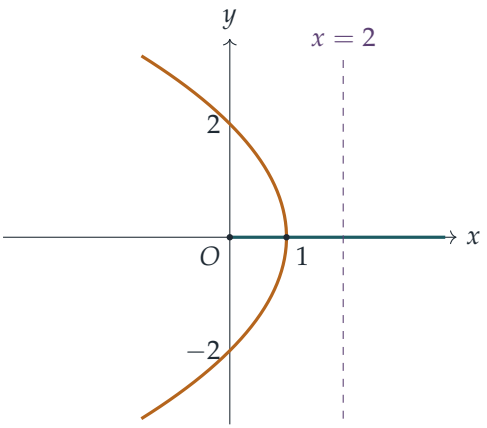
$$x = 1 - \tfrac{1}{4}y^2, \qquad \text{すなわち} \qquad y^2 = 4(1 - x) = -4(x - 1).$$

$b = \frac{1}{2}y$ ととれば、この曲線上のすべての点に到達する。これは軸が x 軸に沿い、頂点が $(1, 0)$ で、x の負の向きに開いた放物線（parabola）である。標準形 $Y^2 = 4cX$ と比べると、$X = x - 1$ として $c = -1$ である。よって焦点（focus）は $X = -1$、すなわち原点であり、準線（directrix）は $X = 1$、すなわち直線 $x = 2$ である。実際 $x^2 + y^2 = x^2 + 4 - 4x = (2 - x)^2$ であるから、どの点も O からの距離と直線 $x = 2$ からの距離が等しい。この放物線は y 軸と $(0, \pm 2)$ で交わる。

考えてみよう なぜ半直線は x の負の側まで伸びないのだろうか。

w 平面の実軸は（a と $-a$ によって）2 回覆われるが、実数を 2 乗しても負の値には決してならない。そのため実軸全体が非負の半分の上に折りたたまれる。同様に、$b \mapsto 2b$ は一対一（one-to-one）であるから、直線 $\mathrm{Re}\, w = 1$ は放物線にちょうど 1 回ずつ移される。

以上より、(x, y) の軌跡は、焦点が原点で準線が $x = 2$ である放物線 $y^2 = 4(1 - x)$ と、半直線 $y = 0$、$x \geq 0$ を合わせたものである。この半直線は焦点から頂点 $(1, 0)$ を通って伸びている。頂点は、小問 (i) の 2 本の直線の交点 $w = 1$ の像である。



最後の小問

$t = a + \mathrm{i}b$ とおく。ここでの「虚数」は純虚数（purely imaginary）を意味するので、$t^2 - 2t$ の実部が 0 になればよい：

$$a^2 - b^2 - 2a = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (a-1)^2 - b^2 = 1.$$

よって t は、中心が 1 で頂点が $t = 0$ と $t = 2$ の直角双曲線（rectangular hyperbola）上にある。その上では $b^2 = a^2 - 2a = a(a-2) \geq 0$ であるから、$a \leq 0$ または $a \geq 2$ である。

さて $t^2 = p + \mathrm{i}q$ より

$$p = a^2 - b^2 = 2a, \qquad q = 2ab,$$

となる。ここで p を簡単にするために双曲線の方程式 $a^2 - b^2 = 2a$ を用いた。よって $a = \frac{1}{2}p$ であり、

$$q^2 = 4a^2b^2 = 4a^2(a^2 - 2a) = p^2\left(\tfrac{1}{4}p^2 - p\right), \qquad \text{よって} \qquad 4q^2 = p^3(p-4).$$

条件 $a \leq 0$ または $a \geq 2$ は $p \leq 0$ または $p \geq 4$ となり、これはちょうど $p^3(p-4) \geq 0$ となる範囲である。逆に、この曲線上の点をとる。$p \neq 0$ ならば $a = \frac{1}{2}p$、$b = q/p$ とおく。すると $b^2 = q^2/p^2 = \frac{1}{4}p(p-4) = a^2 - 2a$ であるから t は双曲線上にあり、$t^2 = (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab = p + \mathrm{i}q$ である。$p = 0$ ならば $q = 0$ であり、この点は $t = 0$ から得られる。よって軌跡は曲線

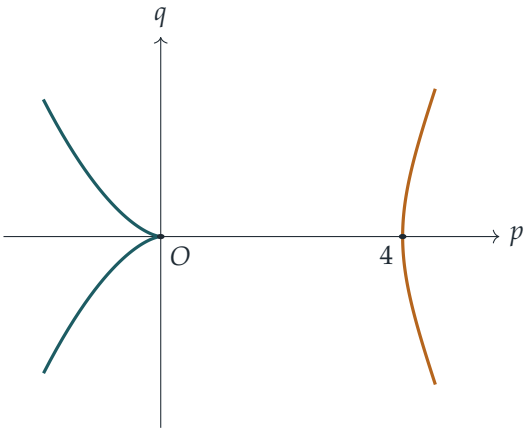
$$4q^2 = p^3(p-4).$$

全体である。

その形は次のとおりである。

- q^2 しか現れないので、p 軸に関して対称である。

- $0 < p < 4$ となる点は存在しない。曲線は二つの部分からなり、それぞれ双曲線の一方の枝から生じる。
- 右側の部分は、$t = 2$ の像である $(4, 0)$ から始まる。その近くでは $q^2 \approx 16(p-4)$ であるから、接線（tangent）は垂直である。
- 左側の部分は、$t = 0$ の像である原点を通る。その近くでは $q^2 \approx -p^3$ であるから $|q| \approx |p|^{3/2}$ となり、右向きの尖点（cusp）をなし、両方の腕は p 軸に接する。
- $|p|$ が大きいところでは $|q| \approx \frac{1}{2}p^2$ であるから、どちらの部分も放物線のように広がっていく。



（縦方向の縮尺は縮めてある。ティール色の部分は双曲線の $\operatorname{Re} t \leq 0$ の枝から、琥珀色の部分は $\operatorname{Re} t \geq 2$ の枝から生じる。）

検算

- 小問 (i)：$w = 1 + 2\mathrm{i}$ とすると $w^2 - 2w = (-3 + 4\mathrm{i}) - (2 + 4\mathrm{i}) = -5$ となり、実数である。小問 (ii)：その 2 乗 $-3 + 4\mathrm{i}$ は $16 = 4(1 - (-3))$ を満たす。
- 最後の小問：$t = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ は $1 - 3 + 2 = 0$ を満たす。その 2 乗は $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ であり、$4q^2 = 48 = (-8)(-6) = p^3(p-4)$ となる。
- 数千個の無作為な点で数値的に確かめ、各軌跡が述べた曲線の上へ移されること、また各曲線のすべての点に到達することを確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で実軸を忘れ、その結果小問 (ii) で半直線を見落とす。あるいは $x \geq 0$ の部分だけでなく x 軸全体を描いてしまう。
- $a^2 - b^2 = 2a$ を用いて $p = 2a$ を得ることをしない。これを使わないと、消去の計算がずっと煩雑になる。
- 最後の概形で、隙間 $0 < p < 4$ や原点の尖点を見落とす。

STEP のその先へ

2 乗する写像 $z \mapsto z^2$ は、最も簡単な等角写像（conformal map）である。この写像は角を 2 倍にする。ここで直線や双曲線が放物線や尖点をもつ曲線に変わるのはそのためである。$z = 0$ では導関数（derivative）が 0 になるので角はもはや保たれず、尖点はそこから生じる。流体力学や静電気学では、このような写像を使って扱いにくい領域を扱いやすい領域に変換するのが定番の手法である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、これらの写像を図を用いて見事に解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。