解答例

STEP II 1988、第 3 問

純粋数学 • 解の対称性

> **STEP II 1988、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q3

鍵となる考え方

係数（coefficients）から考え始めるのではなく、根（roots）の集合を相手にするのである。与えられた性質は、根の集合が操作 $k \mapsto 1/k$ によって変わらないことを述べている。したがって、2 つの根が入れ替わるか、各根がそれぞれ動かないかのいずれかである。2 つ目の操作 $k \mapsto 1-k$ を加えても、同じ議論がもう一度使える。3 次方程式（cubic）の場合、2 つの操作を繰り返し施すと 1 つの根から最大 6 個の値が得られるが、3 次方程式には根が 3 個分の余地しかない。したがって根は、6 個の値のうちいくつかが一致するような特別な点に位置しなければならない。

解答

逆数の性質

根を α と β とする（等しい場合も、複素数の場合もありうる）。すると $\alpha+\beta=-b$、$\alpha\beta=c$ である。まず、0^{-1} は存在しないので 0 は根になりえない。よって $c \neq 0$ である。

写像 $k \mapsto 1/k$ は各根を根に移さなければならないので、$1/\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ である。

- $1/\alpha=\beta$ ならば $\alpha\beta=1$、すなわち $c=1$ である。逆に $c=1$ ならば、根は 0 でなく $\beta=1/\alpha$ を満たすので、各根の逆数（reciprocal）はもう一方の根であり、任意の実数 b に対して性質が成り立つ。（これには $b=\mp 2$ のときの重解（repeated roots）± 1 や、$|b|<2$ のときの単位円（unit circle）上の複素数の根も含まれる。）
- $1/\alpha=\alpha$ であるが $1/\alpha \neq \beta$ である場合、$\alpha=\pm 1$ かつ $\alpha\beta \neq 1$ である。性質を β に適

用すると、その逆数は α ではない（$\alpha\beta \neq 1$ だから）ので、$1/\beta = \beta$ となり、$\beta = \pm 1$ でもある。$\alpha\beta \neq 1$ であるから、根は 1 と -1 でなければならず、$x^2 - 1 = 0$、すなわち $b = 0$、$c = -1$ を得る。この方程式は実際に性質をもつ。

よって、性質が成り立つのはちょうど

$$c = 1 \ (b \text{ は任意の実数}), \qquad \text{または} \qquad b = 0,\ c = -1.$$

のときである。

性質 $k \mapsto 1 - k$ を加える

$1/k$ の代わりに $1 - k$ を用いて同じ議論を行う。$1 - \alpha = \beta$ であって $\alpha + \beta = 1$ となるか、あるいは両方の根が動かず $1 - \alpha = \alpha$ かつ $1 - \beta = \beta$ であって $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ となり、やはり $\alpha + \beta = 1$ となる。いずれにせよ $b = -1$ であり、逆に $b = -1$ ならば根は α と $1 - \alpha$ となるので、性質が成り立つ。

$b = 0$、$c = -1$ の場合はこれを満たさないので、$c = 1$ かつ $b = -1$ が必要である：

$$b = -1, \qquad c = 1,$$

これにより $x^2 - x + 1 = 0$ を得て、その根は $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ である。どちらも絶対値（modulus）が 1、実部（real part）が $\frac{1}{2}$ であるから、$1/k$ と $1 - k$ はともに共役複素数（complex conjugate）$\bar{k}$、すなわちもう一方の根に等しい。

3次方程式

次に、$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ が実数係数で、両方の性質をもつとする。前と同様に 0 は根ではなく、1 も根ではない（もしそうなら $1 - 1 = 0$ が根となってしまう）。

実数係数の3次方程式は少なくとも1つの実数解をもつ。それを a とする。2つの操作を繰り返し施すと、次のそれぞれが根となる：

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad \frac{1}{1 - a}, \quad 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}, \quad \frac{1}{(a - 1)/a} = \frac{a}{a - 1}.$$

（4番目は3番目の逆数、5番目は $1 - 2$ 番目、6番目は5番目の逆数である。）これらは6個の実数であるが、3次方程式の相異なる根は高々3個であるから、このうち2つは一致する。

考えてみよう 「これらのうち2つが等しい」ということから、どのようにして a が決まるだろうか？

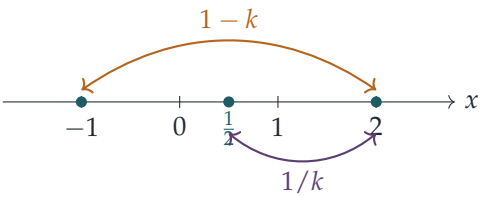
6個の写像を $f_1, \ldots, f_6$ とし、f_1 を恒等写像（identity）とする。各写像はリストの中に逆写像（inverse）をもつ。$\frac{1}{k}$、$1 - k$、$\frac{k}{k-1}$ はそれ自身が逆写像であり、$\frac{1}{1-k}$ と $\frac{k-1}{k}$ は互

いに逆写像である。また、どの 2 つの写像を合成（composing）しても、リスト内の別の写像になることも確かめられる。したがって、$i \neq j$ で $f_i(a) = f_j(a)$ ならば、f_i^{-1} を施すことで $a = g(a)$ を得る。ここで $g = f_i^{-1} \circ f_j$ は 6 個のうちの 1 つであり、恒等写像ではない。よって a は、恒等写像以外の 5 個の写像のいずれかの不動点（fixed point）である：

$$\frac{1}{a} = a \iff a = \pm 1, \qquad \frac{1}{1-a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$1 - a = a \iff a = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{a-1}{a} = a \iff a^2 - a + 1 = 0,$$
$$\frac{a}{a-1} = a \iff a(a-2) = 0.$$

2 次式 $a^2 - a + 1$ は実数解をもたない（先ほどの 2 次方程式である）。また $a \neq 0, 1$ である。ゆえに $a \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ である。

a がこれらのどれであっても、上の 6 個の値はちょうど -1、2、$\frac{1}{2}$ を動く。写像 $1 - k$ は -1 と 2 を入れ替え $\frac{1}{2}$ を固定し、$1/k$ は 2 と $\frac{1}{2}$ を入れ替え -1 を固定するからである。



よって -1、2、$\frac{1}{2}$ はこの 3 次方程式の相異なる 3 つの根である。最高次の係数が 1 の 3 次式（monic cubic）はその 3 つの根によって決まるので、それは

$$(x+1)(x-2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = (x^2 - x - 2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1.$$

でなければならない。逆に、この 3 次方程式の根の集合 $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ は $k \mapsto 1/k$ によっても $k \mapsto 1 - k$ によってもそれ自身に移されるので、この 3 次方程式は実際に両方の性質をもつ。よって

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1 = 0$$

がそのような唯一の 3 次方程式であり、示すべきことが示された。

検算

$x = 2$ を代入すると $8 - 6 - 3 + 1 = 0$、$x = -1$ を代入すると $-1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 0$ である。根の積は $-1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -1 = -r$、根の和は $\frac{3}{2} = -p$ である。この 3 次方程式の係数は、符号を除いて前から読んでも後ろから読んでも同じ（$1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1$）であることに注意しよう。この回文的（palindromic）な形こそ、$k \mapsto 1/k$ が強制するものである。

20,000 組のランダムな (b, c) に対するコンピュータによる検証で逆数の条件が確認され、また $0, \pm 1, \frac{1}{2}, 2$ から離れたランダムな実数 a では、常に相異なる 6 個の値が得られた。

よくある間違い

- 最初の部分で「$c = 1$」だけを答えてしまうこと。各根がそれ自身の逆数である場合から、$b = 0$、$c = -1$ が加わる。
- 両方の写像で閉じている組 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ を見落とすこと。これを除外するのは、**実数**の根から出発することである。実数係数の 3 次方程式は実数解をもち、その根から得られる 6 個の値にこれらが含まれることはない。
- 与えられた 3 次方程式が条件を満たすことだけを証明すること。問題は、それが**唯一の**ものであることを示すよう求めている。

STEP のその先へ

6 個の写像 $k \mapsto k,\ 1/k,\ 1-k,\ \frac{1}{1-k},\ \frac{k-1}{k},\ \frac{k}{k-1}$ は合成に関して群（group）をなし、これは対称群（symmetric group）S_3 と同型である。この群は 3 点 $0, 1, \infty$ を置換し、6 個の値は 4 点の複比（cross-ratio）としてとりうる値である。数え上げの部分は軌道・固定部分群定理（orbit–stabiliser theorem）にあたる。すなわち、軌道（orbit）の長さが 6 より短くなるのは、恒等元以外のある元によって固定される点に限られる。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は集合に作用する群を展開しており、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）は、これらの写像を平面のメビウス（Möbius）変換として示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。