解答例

STEP II 1988、第 2 問

純粋数学 • 対称な代数方程式

> **STEP II 1988、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q2

鍵となる考え方

分母を払い、一方の方程式から他方を引く。右辺の平方の差（difference of two squares）から因数 $y-z$ が現れ、これが左辺に現れる $y-z$ と一致する。そして仮定（hypothesis）$y \neq z$ こそが、この因数で割ることを許すのである。その後はすべてが x, y, z についてのただ一つの対称（symmetric）な式に帰着し、あとは対称性が片付けてくれる。

解答

$x+y+z=a$ の証明

$y \neq 0$ かつ $z \neq 0$ であるから、両辺に掛けて分母を払うことができる。

$$2ay - 3y^2 = (z-x)^2, \tag{1}$$
$$2az - 3z^2 = (x-y)^2. \tag{2}$$

(1) から (2) を引き、右辺に平方の差を用いると、

$$\begin{aligned} 2a(y-z) - 3(y^2-z^2) &= (z-x)^2 - (x-y)^2 \\ &= [(z-x)-(x-y)][(z-x)+(x-y)] \\ &= (y+z-2x)(z-y). \end{aligned}$$

左辺は $(y-z)[2a-3(y+z)]$ であるから、

$$(y-z)[2a-3(y+z)] = -(y-z)(y+z-2x).$$

? **考えてみよう** $y \neq z$ が必要になるのは、正確にはどこか？

まさにここである。$y - z \neq 0$ であるから、これで両辺を割ることができ、

$$2a - 3y - 3z = 2x - y - z \quad \Longrightarrow \quad 2a = 2x + 2y + 2z,$$

となる。よって、求める通り $x + y + z = a$ である。

3番目の方程式の証明

$a = x + y + z$ を (1) に代入すると、

$$y(2x + 2y + 2z - 3y) = (z - x)^2 \implies 2xy - y^2 + 2yz = z^2 - 2zx + x^2,$$

となり、整理すると

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0. \tag{3}$$

を得る。注目すべきは、(3) が x, y, z について**対称**であることだ。ここで示したいものを見てみよう。$x \neq 0$ であるから、方程式 $2a - 3x = \dfrac{(y-z)^2}{x}$ は

$$x(2a - 3x) = (y - z)^2,$$

と同値であり、$a = x + y + z$ を用いるとこれは

$$x(2y + 2z - x) = y^2 - 2yz + z^2 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0,$$

となる。これはまさに (3) である。したがって

$$2a - 3x = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

(実のところ、3つの方程式はいずれも (3) と $a = x + y + z$ を合わせたものを、それぞれ1つの変数の立場から書き表したものにすぎない。)

$y = z$ のとき最後の方程式は成り立ちうるか？

成り立ちうる。$y = z$ ならば、与えられた2つの方程式は同じ方程式 $2a - 3y = \dfrac{(y-x)^2}{y}$ になり、最後の方程式は $2a - 3x = 0$、すなわち $a = \frac{3}{2}x$ となる。$a = \frac{3}{2}x$ を1番目の方程式に代入すると、

$$3x - 3y = \frac{(x-y)^2}{y} \iff 3y(x - y) = (x - y)^2 \iff (x - y)(x - 4y) = 0.$$

よって、たとえば $x = y = z = 1$、$a = \frac{3}{2}$ は3つの方程式すべてを満たす。

$$2a - 3y = 0 = \frac{(z-x)^2}{y}, \qquad 2a - 3z = 0 = \frac{(x-y)^2}{z}, \qquad 2a - 3x = 0 = \frac{(y-z)^2}{x}.$$

別の例として $x=4, y=z=1, a=6$ がある。このとき最初の 2 つの方程式はいずれも $2a-3y=9=\frac{(1-4)^2}{1}$ となり、$2a-3x=0=\frac{0^2}{4}$ である。

したがって、最後の方程式は $y\neq z$ のときに限って成り立つ**わけではない**。条件 $y\neq z$ はそれが成り立つことを保証するが、$y=z$ のときにも成り立ちうるのである。$y=z$ のときに失われるのは**保証**のほうである。たとえば $x=1, y=z=2, a=\frac{13}{4}$ は与えられた 2 つの方程式をともに満たす（どちらも両辺が $\frac{1}{2}$ に等しい）が、$2a-3x=\frac{7}{2}\neq 0$ である。また、最初の例では $x+y+z=3\neq a$ であることにも注意しよう。つまり $y=z$ のときは、最初の結論さえ成り立たないことがある。

検算

- (3) を満たす $x=9, y=4, z=1$ をとる：$81+16+1-72-8-18=0$。このとき $a=14$ であり、$2a-3y=16=\frac{(1-9)^2}{4}$、$2a-3z=25=\frac{(9-4)^2}{1}$、$2a-3x=1=\frac{(4-1)^2}{9}$ となる。3 つとも成り立つ。
- 数値計算により、恒等式 $(1)-(2)=(y-z)\big(2a-2(x+y+z)\big)$ が 10,000 組の無作為な有理数の三つ組で厳密に成り立つことを確かめた。また、$y\neq z$ を満たす (3) 上の無作為な約 1,900 点、および上で挙げた $y=z$ の 3 つの例について、3 つの方程式すべてが成り立つことを確認した。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに $y-z$ で割ってしまう。この一歩こそ、仮定が置かれている理由そのものである。
- 最後の問いに「いいえ」や「はい」とだけ答え、例を挙げない。$y=z$ を満たす具体的な三つ組を 1 つ示せば決着がつく。
- $y=z$ だと最後の方程式が偽になると考えてしまう。$y=z$ によって失われるのは保証だけである。

STEP のその先へ

方程式 (3) は二次形式（quadratic form）であり、その零点集合は (x,y,z) 空間内の二重円錐（double cone）である。$x,y,z>0$ のとき $x=p^2, y=q^2, z=r^2$ とおくと、(3) は

$$-(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)=0,$$

と因数分解（factorise）される。左辺は、3辺が p, q, r の三角形の面積の2乗の16倍である（ヘロン（Heron）の公式）。したがって (3) は、$\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ が退化した三角形（degenerate triangle）をなすことを意味している。たとえば上の検算では $\sqrt{9} = \sqrt{4} + \sqrt{1}$ である。二次形式とその分類は、大学1年次の線形代数（linear algebra）の標準的な話題である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。