解答例

STEP II 1988、第 14 問

力学 ・ 回転する剛体

> **STEP II 1988、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q14

鍵となる考え方

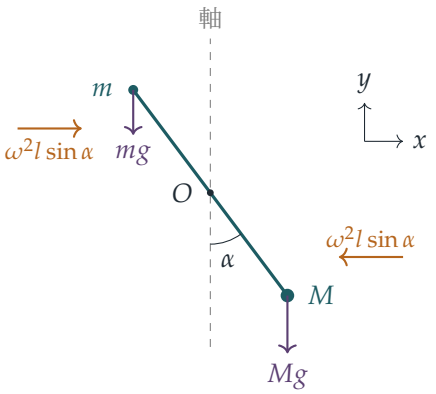
定常状態（steady state）では、棒を含んで回転する鉛直面に対して何も動かないので、各質点は一定の速さで水平な円を描いて回るだけである。これにより各質点の加速度は完全に決まる。すると、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から、棒が各質点に及ぼす力がわかり、**軽い**棒についての二つの事実で問題は片づく。すなわち、棒にはたらく力はつり合わなければならず、さらに（棒は軸のまわりで自由に振れるので）軸のまわりのそれらの力のモーメント（moment）もつり合わなければならない。

解答

モデル化。 質量は軽い剛体棒に付いた質点とみなし、棒は O でなめらかに支えられていて、軸はそれ自身の方向のまわりに偶力（couple）を及ぼさないとする。棒を含む鉛直面で考える。この面は O を通る鉛直線のまわりを角速度 ω で回転している。この面内で x を水平方向、y を鉛直上向きにとり、原点を O とする。

M が $(l\sin\alpha,\ -l\cos\alpha)$ に、m が $(-l\sin\alpha,\ l\cos\alpha)$ にあるとする。重いほうの質点が下にあるはずであることは、すぐ後で示す。各質点は鉛直軸のまわりの半径 $l\sin\alpha$ の水平な円上を一定の速さで運動するので、その加速度は水平に軸へ向かう向きで大きさ $\omega^2 l\sin\alpha$ である：

$$\mathbf{a}_M = (-\omega^2 l\sin\alpha,\ 0), \qquad \mathbf{a}_m = (\omega^2 l\sin\alpha,\ 0).$$



（琥珀色の矢印は加速度、紫色の矢印は重力を表す。）

棒から受ける力。 棒が M と m に及ぼす力をそれぞれ $\mathbf{R}_M$、$\mathbf{R}_m$ とする。これらは棒の方向を向いているとは限らない。剛体棒は横向きにも押すことができるからである。運動の第 2 法則から $\mathbf{R}_M - Mg\,\mathbf{j} = M\mathbf{a}_M$ となるので、

$$\mathbf{R}_M = \left(-M\omega^2 l\sin\alpha,\ Mg\right), \qquad \mathbf{R}_m = \left(m\omega^2 l\sin\alpha,\ mg\right).$$

運動の第 3 法則により、質点は棒の M 側の端を $-\mathbf{R}_M$ で、m 側の端を $-\mathbf{R}_m$ で押す。

? **考えてみよう** 軸は O で棒に未知の力を及ぼしている。その力を知らずに、どうすればモーメントを考えられるだろうか？

軸のまわりのモーメント。 軸からの力は O にはたらくので、O のまわりのモーメントをもたない。また棒は自由に振れるので、軸はそれ自身の方向（O を通りこの面に垂直な直線）のまわりに偶力を与えない。軽い棒はそれ自体の角運動量（angular momentum）をもたないので、両端にはたらく二つの力のこの直線のまわりのモーメントは打ち消し合わなければならない。点 (x, y) にはたらく力 (F_x, F_y) のモーメントは $xF_y - yF_x$（反時計回りを正）である。$(l\sin\alpha, -l\cos\alpha)$ にはたらく $-\mathbf{R}_M$ については

$$l\sin\alpha\,(-Mg) - (-l\cos\alpha)(M\omega^2 l\sin\alpha) = -Mgl\sin\alpha + M\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

であり、$(-l\sin\alpha,\, l\cos\alpha)$ にはたらく $-\mathbf{R}_m$ については

$$(-l\sin\alpha)(-mg) - l\cos\alpha\,(-m\omega^2 l\sin\alpha) = mgl\sin\alpha + m\omega^2 l^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

である。その和を 0 とおき、$l\sin\alpha \neq 0$（$\alpha > 0$ より）で割ると

$$(M+m)\,\omega^2 l\cos\alpha = (M-m)\,g \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)\frac{g}{l\cos\alpha},$$

となる。ここで $\cos\alpha > 0$ で割った。これが示すべき式である。

逆に M が**上側**の質点だとすると、同じ計算（M と m を入れ替える）から $(M+m)\omega^2 l\cos\alpha = (m-M)g < 0$ となり、これは不可能である。したがって、仮定したとおり重いほうの質点は確かに O より下にある。

軸への反作用。 棒は軽いので、棒にはたらく力の合力は 0 である。軸は棒を $\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m$ で押すので、棒は軸を

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{R}_M + \mathbf{R}_m) = \Big((M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha,\ -(M+m)\,g\Big).$$

で押す。この力は下向きで、水平成分は M の側へ外向きである。この力が鉛直下向きとなす角を ϕ とすると、ω^2 の値を用いて

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(M-m)\,\omega^2 l\sin\alpha}{(M+m)\,g} = \frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{l\sin\alpha}{g}\cdot\frac{M-m}{M+m}\cdot\frac{g}{l\cos\alpha}\\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha.\end{aligned}$$

となる。$0 \le \phi < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$\phi = \tan^{-1}\!\left[\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\tan\alpha\right]$ であり、これが求める結果である。

検算

- $m = 0$ のとき、この系は長さ l の円錐振り子（conical pendulum）であり、公式はおなじみの $\omega^2 = g/(l\cos\alpha)$ を与える。このとき反作用の角は α となる。棒は糸のように、自身の方向に沿って引くのである。
- $M = m$ のとき、棒は O でつり合っているので $\omega = 0$ であり、反作用は鉛直で大きさは $2Mg$ である。どちらの公式もこれと一致する。
- 数値的には、$M = 3$、$m = 1$、$l = 0.7$、$\alpha = 0.6$、$g = 9.8$ とすると、$\omega^2 \approx 8.48$、反作用の角は約 9.71° となる。棒の角度についての運動方程式を、角 α で静止した状態から数値的に追うと角度は α のまま保たれ、また三次元での質点の位置から加速度を計算しても同じ角度が再現される。

よくある間違い

- 棒が質点に及ぼす力は棒の方向を向いていると思い込むこと。実際はそうではない。剛体棒は横向きの力も伝えるのであり、だからこそモーメントを考えるのである。

- m の加速度も軸に向かう向きであり、したがって M の加速度とは反対側を向くことを忘れること。反作用の水平成分は一部打ち消し合い、$M+m$ ではなく $M-m$ となる。
- 重いほうの質点を上に置くこと。トルクの方程式から、これは起こりえないことがわかる。

STEP のその先へ

O のまわりの棒の角運動量は鉛直な回転軸と平行ではないので、系が回転するにつれてその向きが変わる。これを変化させるには偶力が必要であり、軸は、ここで用いた方向に垂直な方向にその偶力を供給している。これは慣性テンソル（inertia tensor）を用いた剛体力学の出発点であり、つり合いの悪い車輪が軸受けの上でぶれる理由を説明するものである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、この話題が丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。