解答例

STEP II 1988、第 13 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

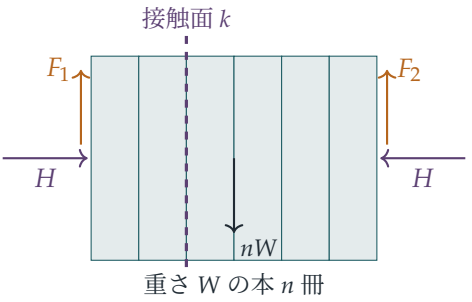
> **STEP II 1988、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q13

鍵となる考え方

本を支える鉛直方向の力はすべて摩擦力（friction）であり、どの接触点においても摩擦力の大きさはそこでの垂直抗力（normal reaction）の μ 倍を超えられない。したがって必要なものは二つある。すべての接触点における垂直抗力（水平方向のつり合い（equilibrium）から容易に求まる）と、各接触点が担わなければならない摩擦力（適当な本のかたまりの鉛直方向のつり合いから求まる）である。そのうえで、どの接触点が最も滑りやすいかを調べる。隣り合う何冊かの本をひとつの物体とみなすと、計算が短くて済む。

解答

モデル化。 同じ本が n 冊あり、それぞれの重さを W、表紙は鉛直であるとする。それぞれの手は水平方向に大きさ $H \leq Q$ の力で押し、上向きの摩擦力を与える。これらを F_1（左手）、F_2（右手）とおく。各手が及ぼす鉛直方向の力はちょうどこの摩擦力なので、$F_1, F_2 \leq P$ が必要である。問題文により回転の効果は無視してよいので、各本あるいは本のかたまりについて力のつり合いだけを考えればよい。



垂直抗力。 本に左から順に $1, 2, \ldots, n$ と番号をつけ、本 k と本 $k+1$ の接触面（interface）を接触面 k とする（$1 \le k \le n-1$）。本 $1, \ldots, k$ からなるかたまりにはたらく水平方向の力は、左手が押す力 H と本 $k+1$ からの垂直抗力だけである。よってその垂直抗力も H である。つまり手と本の間であれ本どうしの間であれ、**すべての**接触点で垂直抗力は H であり、したがってどの接触点も大きさ μH までの摩擦力しか与えられない。

手について。 本の列全体について鉛直方向のつり合いを考えると、

$$F_1 + F_2 = nW.$$

F_1, F_2 はいずれも P 以下（腕の力）であり、かつ $\mu H \le \mu Q$ 以下（摩擦）である。$L = \min(P, \mu Q)$ とおく。すると $nW = F_1 + F_2 \le 2L$ なので、

$$n \le \frac{2L}{W} = \frac{2\min(P, \mu Q)}{W}.$$

これは必要条件である。これが成り立つとき、最善の方法はできるだけ強く押して $H = Q$ とし（H を大きくすれば摩擦力の上限がすべて上がるだけである）、荷重を等分して $F_1 = F_2 = \frac{1}{2}nW \le L$ とすることである。このとき両手とも上限の範囲内にある。

? **考えてみよう** 手が本を保持できていても、途中のどこかで本どうしが滑ってしまうことはないだろうか？

本どうしの接触面。 これを直接確かめる。本 $1, \ldots, k$ からなるかたまりに鉛直方向のつり合いを適用する。その重さ kW は、手からの $F_1 = \frac{1}{2}nW$ と、本 $k+1$ からの摩擦力 f_k（上向きを正とする）によって支えられているので、

$$f_k = kW - \tfrac{1}{2}nW = \left(k - \tfrac{n}{2}\right) W.$$

$1 \le k \le n-1$ に対して $\left|k - \frac{n}{2}\right| \le \frac{n}{2} - 1$ が成り立ち、等号は $k = 1$ と $k = n-1$、すなわち両端の本に隣接する接触面で成り立つ。よって接触面が必要とする摩擦力の最大

値は $\left(\frac{n}{2}-1\right)W$ であり、これは各手が与える $\frac{1}{2}nW$ より W だけ小さい。どの接触面も手と同じ上限 μQ をもつので、手が滑らなければ本どうしも滑らない。（物理的には、両端の本はそれぞれ手によって保持されており、その本が内側へ伝える摩擦力は、手の摩擦力から自身の重さを引いたものになっている。）

答え。 本の列を持ち上げられるのは、$nW \le 2\min(P, \mu Q)$ のとき、かつそのときに限る。したがって本の最大冊数は

$$\boxed{n_{\max} = \left\lfloor \frac{2\min(P,\,\mu Q)}{W} \right\rfloor}$$

であり、これは $2P/W$ と $2\mu Q/W$ のどちらも超えない最大の整数である。どちらの上限が効くかによって、図書館員を制約しているものがわかる。$P < \mu Q$ のときは持ち上げる腕の力、$\mu Q < P$ のときは握る力である。

検算

- $W = 10\,\mathrm{N}$、$P = 60\,\mathrm{N}$、$Q = 100\,\mathrm{N}$、$\mu = 0.4$ とする。このとき $\min(60, 40) = 40$ であり、$n_{\max} = 8$ となる。本が 8 冊のとき、各手は 40 N の摩擦力を与え、これはちょうど上限に等しい。最も厳しい接触面で必要な摩擦力は $30\,\mathrm{N} < 40\,\mathrm{N}$ である。9 冊目を加えると、各手から 45 N が必要になる。
- 本が 1 冊（$n = 1$）のときは接触面がなく、$W \le 2\min(P, \mu Q)$ であればよい。これは明らかに正しい。
- コンピュータを用いて、W, P, Q, μ を無作為に 3000 通り選び、不等式の全体（任意の $H \le Q$、任意の分け方 F_1, F_2、すべての接触面）を解いたところ、実現可能な最大の n は常にこの公式と一致した。

よくある間違い

- 腕が及ぼす鉛直方向の力が摩擦力**そのもの**であり、したがって二つの上限 P と μQ が同じ力に課されることを忘れる。
- 確かめずに、真ん中の本が最も弱い箇所だと思い込む。本どうしの間の力は手のところより大きいのではなく、小さい。
- 切り捨て（floor）をせずに $2\min(P, \mu Q)/W$ を答えとしてしまう。答えは本の冊数なので整数でなければならない。

STEP のその先へ

ここでの摩擦力は**静的不定**（statically indeterminate）である。つり合いによって定まるのは $F_1 + F_2$ だけであり、私たちは、すべての接触点を上限内に収める分け方が**存在する**かどうかを問うたのである。このような問題は小さな線形計画問題（linear programme）であり、許容されるつり合いが存在するかを調べるという同じ考え方が、構造物の極限解析（limit analysis）の基礎になっている。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦とつり合いが丁寧に扱われている様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。