解答例

STEP II 1988、第 12 問

力学 ・ 落下する鎖

STEP II 1988、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

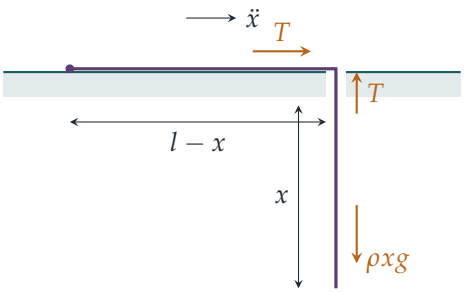
step.maths.org/questions/88-s2-q12

鍵となる考え方

ひもは伸び縮みしない（inextensible）ので、ひものどの部分も同じ速さで動く。したがってひも全体は一つの物体のようにふるまい、それを動かす力はテーブルの下に垂れ下がっている部分の重さである。穴を通り抜けるひもが増えるにつれてその重さは大きくなるので、垂れ下がった部分の長さについての簡単な線形微分方程式（linear differential equation）が得られる。その解は双曲線余弦関数（hyperbolic cosine）であり、求める時間はそれを逆に解くことで得られる。

解答

どこにも摩擦（friction）はない。テーブルはなめらかであり、穴は小さくなめらかである（したがって穴はひもの向きを変えるだけで、ひもに沿った方向には力を及ぼさない）。また、ひもの単位長さあたりの質量は ρ である。時刻 t においてテーブルの下に垂れ下がっている長さを x とすると、テーブルの上にある長さは $l - x$ である。はじめ $x = l - d$ かつ $\dot{x} = 0$ であり、ひもの端が穴の上端に達するのは $x = l$ のときである。テーブルの高さは l より大きいので、それまでに垂れ下がった部分が床に触れることはない。



穴の位置でのひもの張力（tension）を T とする。穴はなめらかなので、張力は穴のすぐ上でもすぐ下でも同じ値 T をとる。

テーブルの上の部分。この部分の質量は $\rho(l-x)$ であり、加速度 $\ddot{x}$ で穴に向かって水平に動く（ひもは伸び縮みしないので、垂れ下がった部分と同じ速さで動く）。テーブルはなめらかなので、この部分にはたらく水平方向の力は張力 T だけである。よって

$$\rho(l-x)\,\ddot{x} = T.$$

垂れ下がった部分。この部分の質量は ρx であり、下向きの重力 $\rho x g$ と上向きの張力 T を受けて、下向きに加速度 $\ddot{x}$ で運動する。

$$\rho x\,\ddot{x} = \rho x g - T.$$

二つの式を足し合わせると T が消去される。

$$\rho l\,\ddot{x} = \rho g x, \qquad \text{すなわち} \qquad \ddot{x} = n^2 x, \quad n = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

考えてみよう 穴の両側にあるひもの量は刻々と変化している。それぞれの部分に $F = ma$ を用いて本当によいのだろうか？

よい。それぞれの式は、ある一つの瞬間に、その瞬間に穴のその側にあるひもの部分に対して適用されている。ひもは全体として一つの速さ $\dot{x}$ で動くので、ひも全体の運動量（momentum）の変化率は $\rho l\ddot{x}$ であり、運動の向きの成分をもつ外力は垂れ下がった部分の重力 $\rho x g$ だけである（テーブルからの垂直抗力は水平な部分の重力とつり合い、穴はひもの向きを変えるだけである）。したがって、合わせた式 $\rho l\ddot{x} = \rho g x$ はひも全体に対するニュートン（Newton）の第二法則（second law）にほかならない。このことは下のエネルギーによる検算でも確かめられる。

$\ddot{x} = n^2 x$ の一般解（general solution）は $x = A\cosh nt + B\sinh nt$ である。$t = 0$ で $\dot{x} = 0$ であることから $B = 0$ が得られ、$t = 0$ で $x = l - d$ であることから $A = l - d$ が得られる。

$$x = (l-d)\cosh nt.$$

ひもの端が穴の上端に達するのは $x = l$ のときであるから、それは

$$\cosh nt_1 = \frac{l}{l-d}.$$

を満たす時刻 t_1 である。$l/(l-d) > 1$ なので、これを満たす正の解はちょうど一つであり、$\operatorname{arcosh} u = \ln(u + \sqrt{u^2-1})$ を用いると、

$$\sqrt{u^2-1} = \frac{\sqrt{l^2-(l-d)^2}}{l-d} = \frac{\sqrt{2ld-d^2}}{l-d},$$

であるから、かかる時間は

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \operatorname{arcosh}\left(\frac{l}{l-d}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \ln\left(\frac{l+\sqrt{2ld-d^2}}{l-d}\right).}$$

である。

検算

- **エネルギー**。テーブルの上面を位置エネルギー（potential energy）の基準とする。垂れ下がった部分の重心（centre of mass）は深さ $x/2$ にあるので、その位置エネルギーは $-\frac{1}{2}\rho g x^2$ である。静止状態からのエネルギー保存（conservation of energy）により $\frac{1}{2}\rho l\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\rho g\left(x^2-(l-d)^2\right)$ が得られ、これを t で微分すると再び $l\ddot{x} = gx$ が得られる。
- d **が小さい場合**。d がごく小さければ、ひものほとんどが垂れ下がっているので、ひもは g に近い加速度で落下し、かかる時間はおよそ $\sqrt{2d/g}$ になるはずである。実際、d が小さいとき、$\cosh nt_1 = 1 + \frac{d}{l} + \cdots$ と $\cosh nt_1 \approx 1 + \frac{1}{2}n^2t_1^2$ から $t_1^2 \approx 2d/(n^2l) = 2d/g$ が得られる。
- $d \to l$ **の場合**。垂れ下がっている部分がほとんどなければ、ひもはほとんど動き出さず、対数の式からわかるように $t_1 \to \infty$ となる。
- **数値による確認**。$l = 2\,\mathrm{m}$、$d = 1.5\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると、公式から $t_1 \approx 0.932\,\mathrm{s}$ が得られ、これは運動を逐次的に数値積分（numerical integration）した結果と一致する。

よくある間違い

- 垂れ下がった部分だけについて $\rho x\ddot{x} = \rho xg$ と書き、その部分がテーブルの上のひもを引きずらなければならないことを忘れる（言い換えれば、質量を取り違える。加速される質量はひも全体の ρl である）。

- $x = A\cos nt$ の形の解を試す。方程式は $\ddot{x} = +n^2x$ なので、運動は振動するのではなく指数関数的に増大する。
- 終了の条件として $x = l$ ではなく $x = d$ とおく。ひもの端が穴に達するのは、長さ l 全体が垂れ下がったときである。

STEP のその先へ

これは質量分布が変化する問題である。質量そのものは一定だが、重力の影響を受ける部分が位置によって変わるため、指数関数を解にもつ線形方程式が導かれる。もし、静止して積み重なったひもを拾い上げながら、ひもが摩擦のないテーブルの縁から落ちていくのであれば、非弾性的（inelastic）な「衝撃」によって運動量が失われ、エネルギーは保存されない。こうした場合を区別することは、大学の力学における古典的なテーマである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、質量が移動する系や、鎖やロープについて丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。