解答例

STEP II 1988、第 11 問

力学 ・ 柱に巻きつく糸

> **STEP II 1988、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q11

鍵となる考え方

糸のうち巻きついていない部分は、常に柱から**接線**（tangent）に沿って離れていく。したがって粒子の位置は「接点に、長さが（ほどけている糸の長さ）である接線方向のベクトルを加えたもの」であり、これは角 θ を用いて簡単に書き表せる。これを微分すると 2 つの項が打ち消し合い、速度は糸に垂直であることがわかる。よって張力（tension）は仕事（work）をせず、速さは初めの値のまま一定であり、速さの式は θ についての変数分離形の微分方程式（separable differential equation）となる。

解答

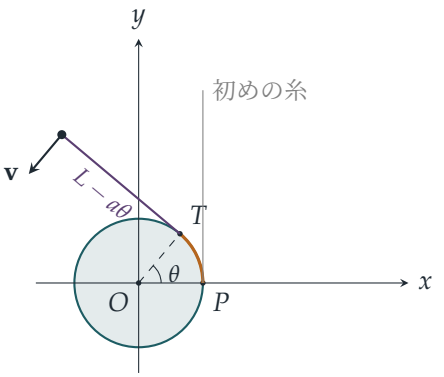
設定

粒子を滑らかな台の上の質点（point mass）とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（inextensible）もので、常にぴんと張っているとする。重力と垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向で互いに打ち消し合うので、水平方向にはたらく力は張力のみである。

原点を O とする座標軸をとり、P を $(a, 0)$ におく。糸は初め OP に垂直であるから、P において柱に接している。そこで粒子の初めの位置を (a, L) とする。（鏡像の選び方をしても、y 座標の符号が反転するだけである。）糸が反時計回りに巻きついていき、角 θ だけ巻きついたとき、長さ $a\theta$ の部分が P からの弧に沿っており、糸は

$$T = a(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

において柱から離れる。



巻きついていない長さ $L - a\theta$ の部分は、T における接線に沿って伸びている。糸がほどけていく向きの単位接ベクトルは $(-\sin\theta, \cos\theta)$ である。実際、これは OT に垂直であり、$\theta = 0$ のとき $(0,1)$ となって初めの位置と一致する。

位置と速度

よって粒子の位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + (L - a\theta)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos\theta - (L - a\theta)\sin\theta\\ a\sin\theta + (L - a\theta)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

である。連鎖律（chain rule）と積の微分法（product rule）を用いて t で微分すると、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= a\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} - a\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} + (L - a\theta)\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\\ &= -(L - a\theta)\dot{\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

となる。最初の 2 つの項は打ち消し合う。接点が柱に沿って動く効果が、巻きついていない糸が短くなる効果によってちょうど相殺されるのである。

$(\cos\theta, \sin\theta)$ は単位ベクトルであり、$L - a\theta > 0$、また糸が巻きついていく間は $\dot{\theta} > 0$ であるから、速さは

$$|\dot{\mathbf{r}}| = (L - a\theta)\dot{\theta},$$

であり、これが示すべきことであった。

柱に当たるまでの時間

> **考えてみよう** 糸は粒子を引っ張っているのに、なぜ粒子の速さは v のまま変わらないのだろうか。

速度は $(\cos\theta, \sin\theta)$ に平行であり、一方で糸、したがって張力は $(-\sin\theta, \cos\theta)$ の方向にある。これらは垂直であるから、張力は仕事をしない。台は滑らかなので、張力は水平方向にはたらく唯一の力である。よって運動エネルギー（kinetic energy）は一定であり、それとともに速さも v のまま一定である。張力は速度の向きを変えるだけである。

したがって、粒子が柱に達するまでのすべての t について

$$(L - a\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \theta(0) = 0.$$

が成り立つ。変数分離して 0 から t まで積分すると

$$L\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = vt.$$

を得る。粒子が柱に当たるのは糸がすべて巻きついたとき、すなわち $a\theta = L$ となるときであり、このとき $\theta = L/a$ である。すると

$$vt = \frac{L^2}{a} - \frac{L^2}{2a} = \frac{L^2}{2a}, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{L^2}{2av},$$

であり、これが求める時間である。

検算

- $\theta = 0$ のとき、式から $\mathbf{r} = (a, L)$ および $\dot{\mathbf{r}} = (-L\dot{\theta}, 0)$ が得られ、これは初めの糸に垂直であって、あるべき姿になっている。
- 単位：$L^2/(av)$ は $\mathrm{m}^2/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{m\,s^{-1}}) = \mathrm{s}$ である。
- 答えの別の見方：粒子の経路全体の長さは

  $$\int_0^{L/a} (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{L^2}{2a},$$

  であり、これを一定の速さ v で進む。
- $a = 1$、$L = 3$、$v = 2$ の柱に非常に硬い糸が巻きつく場合について、運動を数値シミュレーションした。シミュレーションによる時間は $L\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 = vt$ と 10^{-5} 以内で一致し、$\dot{\theta} = v/(L - a\theta)$ を $a\theta = L$ まで積分すると 2.25 となり、これは $L^2/(2av)$ に等しい。

よくある間違い

- O のまわりの角運動量（angular momentum）保存則を用いること。張力は O を通らない（接線に沿ってはたらく）ので、O のまわりの角運動量は保存**されない**。正しく使うべき道具はエネルギーである。
- 巻きついていない糸を接線方向ではなく $(\cos\theta, \sin\theta)$ の方向、すなわち動径方向にとってしまうこと。
- 速さの式には $\dot{\theta} > 0$ が必要であることを忘れること。ベクトルの大きさは $(L - a\theta)|\dot{\theta}|$ である。

STEP のその先へ

粒子が描く経路は円の**伸開線**（involute）であり、これは糸巻きからぴんと張った糸をほどいていくときに、糸の端が描く曲線である。歯車の歯があのような形をしているのは伸開線のためであり、伸開線はホイヘンス（Huygens）による振り子時計の研究においても中心的な役割を果たした。その弧長 $\int (L - a\theta)\,\mathrm{d}\theta$ は、平面曲線の微分幾何学（differential geometry）（縮閉線（evolute）、伸開線、曲率（curvature））の最初の例である。力学の側面については、エネルギーや角運動量が保存される場合とされない場合も含めて、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。