解答例

STEP II 1988、第 10 問

純粋数学 ・ ベクトルと放物面

STEP II 1988、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s2-q10

鍵となる考え方

この方程式は、幾何学的な意味のはっきりした二つの部分からなる。r は O からの距離であり、$(a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/a$ は平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$ からの符号付き距離（signed distance）である。したがって S は、O を焦点（focus）、この平面を準線（directrix）とする回転放物面（paraboloid of revolution）である。残りの部分は、O を通る直線に沿って考えればよい。直線 OP 上の点を $\lambda\mathbf{p}$ と書き、O を通り $\mathbf{a}$ と $\mathbf{p}$ の両方に垂直な直線上の点を $\mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ と書く。そしてこれらを S の方程式に代入する。$|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$ であるから、λ の符号が重要になる。

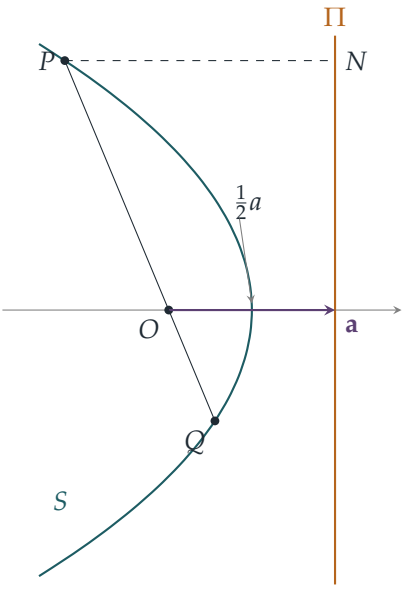
解答

軌跡（locus）

Π を平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = a^2$ とする。この平面の単位法線ベクトル（unit normal）は $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$ であり、Π は O から距離 a だけ $\mathbf{a}$ の側に離れたところにある。点 $\mathbf{r}$ から Π までの距離は

$$d(\mathbf{r}) = |\,a - \hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}\,| = \frac{|a^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|}{a}.$$

である。



図は、$\mathbf{a}$ を含む平面による S の断面を示している。点 P は、O からの距離と、Π 上への垂線の足 N からの距離が等しい。この曲面は O と Π のちょうど中間にある $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ で軸と交わる。

S 上の点は等距離にある。 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+ar=a^2$ ならば、$a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar\geq 0$ である。よって

$$d(\mathbf{r})=\frac{a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{a}=\frac{ar}{a}=r=|OR|.$$

等距離にある点は S 上にある。 $r=d(\mathbf{r})$、すなわち $ar=|a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}|$ と仮定する。$a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\geq 0$ ならば、これはまさに S の方程式である。そうでなければ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}>a^2$ であり、条件は $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=ar+a^2>ar$ を意味する。これはコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz）による $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\leq ar$ に矛盾する。よって Π の向こう側にある点で等距離のものは存在せず、S は O と Π から等距離にある点全体の集合とちょうど一致する。これは、O を通り $\mathbf{a}$ の方向をもつ直線を軸とする回転放物面である。

後で役に立つ帰結が二つある。S 上の点 P について

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}=a^2-ap. \qquad (*)$$

が成り立つ。また $a^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+ap\leq 2ap$ であるから $p\geq\frac{1}{2}a$ であり、したがって $2p-a\geq 0$ である。等号が成り立つのは $\mathbf{p}$ が $\mathbf{a}$ の正の定数倍のとき、すなわち P が頂点（vertex）$\frac{1}{2}\mathbf{a}$ のときに限る。

第二の交点 Q

直線 OP 上の点は $\lambda\mathbf{p}$ と表され、$|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda|p$ である。これを S の方程式に代入すると

$$\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + a|\lambda|p = a^2.$$

を得る。

> **考えてみよう** なぜ Q は O に関して P と同じ側にあり得ないのか。

$\lambda > 0$ ならば左辺は $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + ap) = \lambda a^2$ となるので $\lambda = 1$ であり、これは P 自身である。（幾何学的には、焦点から出る半直線は回転放物面と高々一回しか交わらない。）よって Q では $\lambda < 0$ であり、このとき $|\lambda| = -\lambda$ である。$(*)$ を用いると

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p} - ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda(a^2 - 2ap) = a^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{a}{2p-a}.$$

となる。$2p > a$、すなわち P が頂点でなければ、これは求めるとおり負である。（頂点では直線 OP は軸そのものであり、S と一回しか交わらない。）したがって

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{a}{2p-a}\,\mathbf{p}} \qquad \text{かつ} \qquad |OQ| = \frac{ap}{2p-a}.$$

点 T と T'

O を通り $\mathbf{a}$ と $\mathbf{p}$ の両方に垂直な直線は $\mathbf{t} = \mu\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ である。（$\mathbf{a}\times\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ が必要なので、P は軸上にないとする。）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = 0$ であるから、S の方程式は $at = a^2$、すなわち $|\mathbf{t}| = a$ に帰着する。よって T と T' は、O を通り Π に平行な平面と S との交わりである円の上にあり、

$$|\mu|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{p}| = a.$$

が成り立つ。

> **考えてみよう** $\mathbf{a}$ と $\mathbf{p}$ のなす角を知らずに、どうやって $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|$ を求めればよいか。

恒等式 $|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 = a^2p^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})^2$ を用いる。これは $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を姿を変えて書いたものである。そこに $(*)$ を代入する。

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}\times\mathbf{p}|^2 &= a^2p^2 - (a^2 - ap)^2\\ &= a^2p^2 - a^4 + 2a^3p - a^2p^2\\ &= a^3(2p-a).\end{aligned}$$

したがって

$$|\mu| = \frac{a}{a^{3/2}\sqrt{2p-a}} = \frac{1}{\sqrt{a(2p-a)}} = \frac{1}{\sqrt{2ap-a^2}},$$

であり、T と T' の位置ベクトル（position vector）は求めるとおり $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2ap-a^2}}\,\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ である。

三角形 PQT の面積

点 P、O、Q は同一直線上にあり、O は P と Q の間にある。ベクトル $\mathbf{t}$ は $\mathbf{a}\times\mathbf{p}$ に平行なので $\mathbf{p}$ に垂直であり、したがって直線 PQ に垂直である。よって OT は三角形 PQT の T から下ろした高さ（altitude）であり、その長さは a である。底辺は

$$|PQ| = p + \frac{ap}{2p-a} = \frac{p(2p-a)+ap}{2p-a} = \frac{2p^2}{2p-a}.$$

である。したがって

$$\text{面積} = \tfrac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot|OT| = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2p^2}{2p-a}\cdot a = \frac{ap^2}{2p-a},$$

となり、求める結果を得る。T の代わりに T' をとっても同じことが成り立つ。

検算

- $\mathbf{a}=(2,0,0)$、$P=(-1.25,3,0)$ とする。これは図中の点である。このとき $\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}+ap = -2.5+2(3.25) = 4 = a^2$ であるから、P は S 上にある。公式から $\mathbf{q} = -\frac{2}{4.5}\mathbf{p} = (0.556,-1.333,0)$ を得て、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}+aq = 1.111+2.889 = 4$ であるから、Q も S 上にある。
- P を通径（latus rectum）の端点にとると、$\mathbf{p}\perp\mathbf{a}$ かつ $p=a$ である。このとき $\mathbf{q}=-\mathbf{p}$ となり、対称性から正しい。面積は $\frac{1}{2}(2a)(a)=a^2$ であり、公式からも $a\cdot a^2/a = a^2$ を得る。
- 二つの焦点距離は $\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{p}+\dfrac{2p-a}{ap} = \dfrac{2}{a}$ を満たす。これは放物線の焦点弦（focal chord）についての古典的な性質である。
- 数値的には、$\mathbf{a}$ と P を無作為に 20 000 通り選んで Q、T、T' と面積を確かめた。最大誤差は約 10^{-11} であった。

よくある間違い

- すべての λ について $|\lambda\mathbf{p}| = \lambda p$ と書いてしまうこと。こうすると解は $\lambda=1$ しかなく、Q が求まらない。
- 最初の部分で逆（converse）を忘れること。Π の向こう側にある点では $|a^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}-a^2$ であり、そのような点を除外しなければならない。

- $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PT}$ の外積（cross product）を使って面積を計算すること。それでも求まるが、$OT \perp PQ$ に気づく方法よりずっと長くなる。

STEP のその先へ

これは円錐曲線（conic）の焦点・準線による定義を、三次元で、しかも座標を使わずに表したものである。e を離心率（eccentricity）とすると、曲面 $e\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + ar = e\,a^2$（$O$ からの距離が Π からの距離の e 倍に等しい点の集合）は、O を焦点とするほかの回転二次曲面（quadric of revolution）を与える。関係式 $1/OP + 1/OQ = 2/a$ は、軌道力学（orbital mechanics）で中心的な役割を果たす極方程式（polar equation）$\ell/r = 1 + e\cos\theta$ のベクトル版である。ベクトル代数をさらに学ぶにはストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい次の一歩であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの種の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。