解答例

STEP II 1988、第 1 問

純粋数学 • 部分分数分解と級数

> **STEP II 1988、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s2-q1

鍵となる考え方

f を部分分数（partial fractions）に分解すれば、すべては二つの簡単な分数 $\frac{1}{x-1}$ と $\frac{1}{x-2}$ を等比級数（geometric series）として展開することに帰着する。本当に判断が必要なのは、それぞれを**どちら向きに**展開するかという点だけである。等比級数 $\sum r^n$ は $|r|<1$ のときに限り収束（converge）するので、各分数について、分母の二つの項のうち大きさの大きいほうをくくり出す。この選択は $|x|$ が 1 を、さらに 2 を越えるところで変わる。展開が三通りある理由はここにある。

解答

部分分数分解

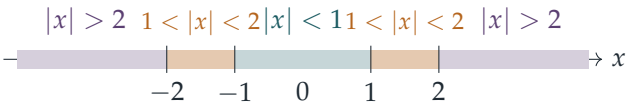
$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ とおく。隠蔽法（cover-up rule）により $A = \frac{1}{1-2} = -1$、$B = \frac{1}{2-1} = 1$ を得るので、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

必要となる基本的な部品は等比級数

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \qquad (|r|<1),$$

であり、r としては x、$\frac{x}{2}$、$\frac{1}{x}$、$\frac{2}{x}$ のうち、考えている範囲で絶対値（modulus）が 1 より小さくなるものを用いる。



範囲 $|x|<1$

このとき $|x|<1$ であり、さらに $|\frac{x}{2}|<\frac{1}{2}<1$ であるから、どちらの分数も x のべきで展開できる：

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$
$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

これらを加えて、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\qquad(|x|<1),$$

となり、求める結果を得る。

範囲 $1<|x|<2$

二つ目の分数はそのままでよい。依然として $|\frac{x}{2}|<1$ であるから、先ほどとまったく同様に $\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\sum_{n\geq0}(\frac{x}{2})^n$ である。

? **考えてみよう** なぜ一つ目の分数に $\sum x^n$ を使い続けることができないのか。

今度は $|x|>1$ なので、項 x^n は 0 に近づかず、$\sum x^n$ は発散（diverge）するからである。そこで、分母から大きいほうの項 x をくくり出す。すると比 $\frac{1}{x}$ が残り、$|\frac{1}{x}|<1$ となる：

$$-\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}x^{-n}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^{-(n+1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n},$$

ここで最後の段階は $n+1$ を改めて n と書き直しただけである。二つを加えて、

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\qquad(1<|x|<2),$$

となり、求める結果を得る。

範囲 $|x|>2$

一つ目の分数は、$|\frac{1}{x}|<\frac{1}{2}<1$ であるから、前の範囲での展開をそのまま使える。しかし今度は $|\frac{x}{2}|>1$ なので、二つ目の分数も同じように向きを変えなければならない。x

をくくり出すと比 $\frac{2}{x}$ が残り、$|\frac{2}{x}| < 1$ となる：

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n}.$$

したがって、$|x| > 2$ のとき

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n}.$$

$n = 1$ の係数は $2^0 - 1 = 0$ であるから、この級数は実際には x^{-2} から始まる：

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)x^{-n} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{7}{x^4} + \frac{15}{x^5} + \cdots \qquad (|x| > 2).}$$

（二つの級数を項ごとにまとめてよいのは、それぞれが収束するからである。）二つの級数の形でも、まとめた形でも、正しい答えである。

検算

- **主要な振る舞い。** $|x|$ が大きいとき $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} \approx \frac{1}{x^2}$ であり、これは最後の展開の初項と一致する。x^{-1} の係数が消えるのは偶然ではない。二つの部分分数は、大きさが等しく符号が逆の $\frac{1}{x}$ のような振る舞いをするのである。
- **値の確認。** $x = 3$ では $\mathrm{f}(3) = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$ であり、$\sum_{n\geq 2}(2^{n-1}-1)3^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}(\frac{2}{3})^n - \sum_{n\geq 2}(\frac{1}{3})^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ となる。同様に、$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$ と $\mathrm{f}(\frac{3}{2}) = -4$ も、最初の二つの展開と一致する。
- 数値的にも、三つの級数（4000 項まで和をとったもの）は、それぞれの範囲内の正負にわたる数百個の無作為な点で、f と約 10^{-14} の精度で一致する。

よくある間違い

- $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}$ で符号を誤ること。くくり出す因数は 2 ではなく -2 である。
- $\frac{1}{x}$ を掛けたあとで添字が一つずれること。$\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}x^{-n}$ は x^{-1} から始まるので、添字を付け替えた和は $n = 1$ から始まる。
- 比の絶対値が 1 より小さいことを確かめずに、すべての範囲で同じ展開を使うこと。

STEP のその先へ

これら三つの展開は、複素解析（complex analysis）における**ローラン級数**（Laurent series）の実変数版の影である。複素数 z に対して、関数 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ は、$|z| < 1$、$1 < |z| < 2$、$|z| > 2$ の各領域でそれぞれ異なるローラン展開をもつ。これらは、極（poles）を通る円で区切られた一つの円板と二つの円環領域（annuli）であり、円 $|x| = 1$ と $|x| = 2$ はまさにこれになる。このような展開における z^{-1} の係数（留数（residues））が、周回積分（contour integrals）を支配することがわかる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、べき級数（power series）とローラン級数について、見事に幾何学的な解説を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。