解答例

STEP I 1988、第 9 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1988、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q9

鍵となる考え方

どちらの積分も、どの部分に着目するかを正しく選べば、標準的な手法で解ける。(i) では $\ln x$ と x のべきの積であるから、部分積分（integration by parts）を用い、対数を微分して消してしまう。(ii) では厄介なのは平方根であるから、これを新しい変数とする。$\cos x\,\mathrm{d}x$ はちょうどこの置換積分（substitution）に必要なものであり、残るのは部分分数分解（partial fractions）で処理できる有理関数（rational function）である。

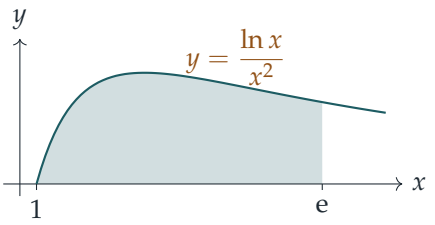
解答

小問 (i)

$u = \ln x$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$ として部分積分を行う。このとき $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$、$v = -\dfrac{1}{x}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{\mathrm{e}} - 0\right) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

ここで $\ln \mathrm{e} = 1$ と $\ln 1 = 0$ を用いた。答えは正であり、そうでなければならない。被積分関数（integrand）は $(1, \mathrm{e}]$ 上で正だからである。



網掛け部分の面積は $1-2/\mathrm{e}\approx 0.264$ である。

小問 (ii)

被積分関数は $\sin x\neq 0$ かつ $1+\sin x>0$ のとき定義される。

$$u=\sqrt{1+\sin x},\qquad \text{とおくと} u^2=1+\sin x,\quad 2u\,\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x,\quad \sin x=u^2-1.$$

ここで $u>0$ であり、$\sin x\neq 0$ より $u\neq 1$ である。よって

$$\int\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2u}{(u^2-1)\,u}\,\mathrm{d}u=\int\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u.$$

考えてみよう $\cos x$ はどうなったのか。これを u で表す必要はあるのだろうか。

その必要はない。$\cos x\,\mathrm{d}x$ 全体が $2u\,\mathrm{d}u$ に置き換わるのであり、これこそがこの置換がこれほどきれいに機能する理由である。もし分子が別のものであったなら、$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ が必要になり、符号の面倒な問題がつきまとったであろう。

部分分数分解により $\dfrac{2}{u^2-1}=\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u+1}$ となるから、

$$\int\frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u=\ln|u-1|-\ln|u+1|+C=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

x に戻すと、

$$\int\frac{\cos x}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sqrt{1+\sin x}+1}\right|+C.$$

絶対値記号（modulus signs）は重要である。$-1<\sin x<0$ のとき $0<u<1$ となり、$\dfrac{u-1}{u+1}$ は負になるからである。（厳密には、定義域は $\sin x$ の零点によって分割されているので、被積分関数が定義される各区間ごとに定数が異なってよい。）

分数の分子と分母に $u-1$ を掛けると、同値な別の形が得られる。$(u+1)(u-1)=u^2-1=\sin x$ であるから、答えは

$$2\ln|\sqrt{1+\sin x}-1|-\ln|\sin x|+C.$$

とも表せる。

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_1^{\mathrm{e}} x^{-2}\ln x\,\mathrm{d}x \approx 0.264241$ が得られ、$1-2/\mathrm{e} = 0.264241\ldots$ と一致する。
- (ii) については答えを微分すればよい。合成関数の微分法（chain rule）により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| = \dfrac{2}{u^2-1}\cdot\dfrac{\cos x}{2u}$ となり、これは被積分関数である。数値的には、被積分関数の $\int_{0.3}^{1.2}$ はシンプソンの公式で 0.926006 となり、原始関数（antiderivative）の差と一致する。$[-1.2, -0.2]$ のように $\sin x < 0$ となる区間でも同様によく一致し、そこでの積分値は -2.361027 である。

よくある間違い

- (i) で、逆に $u = 1/x^2$、$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \ln x$ と選んでしまう。原理的にはうまくいくが、はるかに煩雑になる。対数のほうを微分すること。
- (ii) で絶対値記号を落としてしまい、$\sin x < 0$ のとき答えが定義されなくなる。
- $2u\,\mathrm{d}u$ の因数 2 を落としてしまい、答えが半分になる。

STEP のその先へ

小問 (ii) は一般的な原理の一例である。x と $\sqrt{ax+b}$ の有理関数である被積分関数は、置換 $u = \sqrt{ax+b}$ によって u の有理関数となり、有理関数は部分分数分解によって常に積分できる。ここでは $\sin x$ が x の役割を果たしている。大学 1 年の解析学（analysis）の講義では、この話のもう一つの側面に出会う。すなわち、置換積分と部分積分を正当化する定理、そして積分定数（constant of integration）が定義域の離れた区間ごとに異なってよい理由である。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、その両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。