解答例

STEP I 1988、第 8 問

純粋数学 • 空間図形

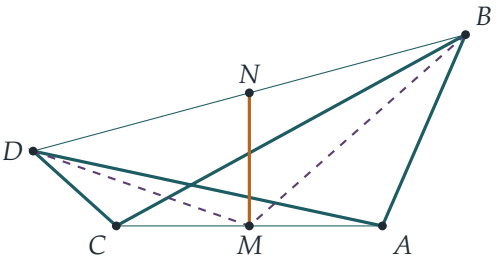
> **STEP I 1988、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q8

鍵となる考え方

各対角線（diagonal）は四辺形（quadrilateral）を二つの三角形に分け、向かい合う辺が等しいことから、その二つの三角形は合同（congruent）になる（三辺相等、SSS）。合同な三角形の中線（median）は等しいので、一方の対角線の中点（midpoint）は他方の対角線の両端から等距離にある。線分の両端から等距離にある点とその線分の中点を結ぶと、その線分に垂直な直線が得られる。これは二等辺三角形（isosceles triangle）の性質にほかならない。

解答

AC の中点を M、BD の中点を N とする。



この図はねじれ四辺形（skew quadrilateral）の射影（projection）である。破線 MB と MD は以下で用いる中線であり、琥珀色の線分が MN である。

まず、$M \neq N$ であること

直線 MN が意味をもつのは、M と N が異なる点である場合に限る。もし $M = N$ ならば、対角線 AC と BD は共通の点で互いに二等分し合うことになる。共通の点を通る二直線は一つの平面上にあるので、A、B、C、D はすべてその平面上にあり、$ABCD$ は（平面上の）平行四辺形（parallelogram）になってしまう。$ABCD$ はねじれ四辺形であるから、$M \neq N$ である。「ねじれ」という条件が使われるのはまさにこの箇所である。平行四辺形では向かい合う辺は等しいが、二つの中点が一致してしまう。

MN は BD に垂直である

対角線 AC を共有する三角形 ABC と CDA を考える。

$$AB = CD, \qquad BC = DA, \qquad CA = AC,$$

であるから、これらの三角形は $A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$C \leftrightarrow A$ の対応で合同である（SSS）。この対応のもとで、三角形 ABC において B から AC の中点へ引いた中線は、三角形 CDA において D から CA の中点へ引いた中線に対応する。どちらの中線も同じ点 M で終わるので、

$$MB = MD.$$

考えてみよう 合同な三角形の中線が等しくなければならないのはなぜか。

中線は辺の長さだけで完全に決まる。たとえば余弦定理（cosine rule）（あるいは中線定理（Apollonius's theorem））により、三角形 ABC において B から引いた中線 m は $4m^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2$ を満たす。辺の長さが同じなら中線も同じなので、$MB^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) = \frac{1}{4}(2CD^2 + 2DA^2 - CA^2) = MD^2$ となる。

さて、M は B と D から等距離にあり、N は BD の中点である。三角形 MNB と MND は $MB = MD$、$NB = ND$ を満たし、辺 MN を共有するので合同であり（SSS）、角 $\angle MNB$ と $\angle MND$ は等しい。また、B、N、D は一直線上にあるので、この二つの角は互いに補角（supplementary）である。よってどちらも直角であり、$MN \perp BD$ となる。（これらの三角形は退化していない。もし M が直線 BD 上にあって $MB = MD$ ならば、M は中点 N に一致するが、それはすでに否定した。）

MN は AC に垂直である

対角線の役割を入れ替えれば、同じ議論が成り立つ。三角形 ABD と CDB は対角線 BD を共有し、

$$AB = CD, \qquad AD = CB, \qquad BD = DB,$$

であるから、$A \leftrightarrow C$、$B \leftrightarrow D$、$D \leftrightarrow B$ の対応で合同である。A からの中線と C からの中線はどちらも BD の中点 N で終わるので、$NA = NC$ である。M は AC の中点であり $N \neq M$ であるから、上の二等辺三角形の議論により $MN \perp AC$ が得られる。

以上より、対角線の中点を結ぶ直線は各対角線に垂直であり、示すべきことが証明された。

ベクトルを用いる方法

原点を M にとると、位置ベクトル（position vector）として $C = -A$ であり、$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ である。与えられた二つの等式を 2 乗すると、

$$AB^2 = CD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d},$$
$$BC^2 = AD^2 \iff |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}.$$

辺々引くと $4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -4\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$、すなわち $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = 0$ を得る。$\overrightarrow{AC} = -2\mathbf{a}$ であるから、これは $\overrightarrow{MN} \perp AC$ を意味する。代わりに原点を N にとれば、同様にして $MN \perp BD$ が得られる。

検算

$A = (1,0,0)$、$B = (1,2,1)$、$C = (-1,0,0)$、$D = (-1,-2,1)$ とする。このとき $AB = CD = \sqrt{5}$、$BC = AD = 3$ であり、4 点は同一平面上にない（スカラー三重積（scalar triple product）$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$ は 8 である）。ここで $M = (0,0,0)$、$N = (0,0,1)$ であるから MN は z 軸に沿っており、一方 AC は x 軸に沿い、$\overrightarrow{BD} = (-2,-4,0)$ は z 成分をもたない。よってどちらも MN に垂直である。また、向かい合う辺が等しいねじれ四辺形を無作為に 20 000 個生成して調べたところ、MN といずれかの対角線のなす角の余弦は一度も 4×10^{-12} を超えなかった。

よくある間違い

- $M \neq N$ である理由を説明していない。ねじれという条件がなければ結果は成り立たない。平行四辺形では直線 MN がそもそも存在しないからである。
- 合同な三角形を明示せずに「対称性より」$MB = MD$ と主張する。
- 一方の対角線に対する垂直性しか証明していない。もう一方には別の合同な三角形の組が必要である。

STEP のその先へ

上の例では、z 軸（直線 MN）のまわりの半回転（half-turn）によって A と C、B と D が入れ替わる。これは一般に成り立つ。すなわち、向かい合う辺が等しいねじれ四辺形はすべて、MN のまわりの $180°$ の回転によって自分自身に移される。（この回転は M を固定し、MN に垂直なすべての方向を逆向きにするので、A を C に移す。同様に B を D に移す。）逆に、この半回転を考えれば辺が等しいことは明らかである。幾何学的な事実を、空間の等長変換（isometry）である対称性の帰結として捉えることは、大学 1 年次の幾何学や群論（group theory）の中心的な考え方である。群論の側面については Allenby の *Rings, Fields and Groups* が詳しく展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には STEP 形式の幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。