解答例

STEP I 1988、第 7 問

純粋数学 • 2 次関数の導関数の評価

> **STEP I 1988、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q7

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.6 節「**傾きの上界**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/markov-bound.html

鍵となる考え方

二次関数（quadratic）は 3 点での値によって一意に定まるので、f' は $f(1)$、$f(-1)$、$f(0)$ から組み立て直すことができる。f' をそのように表してしまえば、仮定（hypothesis）$|f| \le 1$ によって 3 つの係数それぞれが抑えられ、あとは三角不等式（triangle inequality）が片づけてくれる。最後の部分では、証明に現れるすべての不等式が等号になるのは f がどのような値をとるときかを調べる。

解答

$f'(x)$ の恒等式

$f(1) = a+b+c$、$f(-1) = a-b+c$、$f(0) = c$ である。右辺を x のべきについて整理すると、

$$\begin{aligned} &f(1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + f(-1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right) - 2f(0)x \\ &\quad = \big[(a+b+c)+(a-b+c)-2c\big]x + \tfrac{1}{2}\big[(a+b+c)-(a-b+c)\big] \\ &\quad = 2ax + b. \end{aligned}$$

$f'(x) = 2ax+b$ であるから、これが求める恒等式（identity）である。

評価 $|f'(x)| \le 4$

$|x| \le 1$ のとき常に $|f(x)| \le 1$ であると仮定する。特に、$|f(1)|$、$|f(-1)|$、$|f(0)|$ はいずれも 1 以下である。$|x| \le 1$ を満たす任意の x をとる。恒等式と三角不等式により、

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le |f(1)|\left|x+\tfrac{1}{2}\right| + |f(-1)|\left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|f(0)|\,|x| \\ &\le \left|x+\tfrac{1}{2}\right| + \left|x-\tfrac{1}{2}\right| + 2|x|. \end{aligned}$$

考えてみよう $|x| \le 1$ のとき、$\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|$ はどこまで大きくなりうるか。

これは x から $\frac{1}{2}$ までの距離と $-\frac{1}{2}$ までの距離の和である。$|x| \le \frac{1}{2}$ ならば x は 2 点の間にあり、和はちょうど 1 である。$|x| > \frac{1}{2}$ ならば 2 点はともに x の同じ側にあり、和は $2|x|$ である。いずれの場合も、$|x| \le 1$ ならば和は 2 以下である。また $2|x| \le 2$ であるから、

$$|f'(x)| \le 2 + 2 = 4 \qquad \text{ただし} |x| \le 1,$$

となり、示すべきことが得られた。

(別の見方もある。f' は一次関数（linear function）なので、$[-1, 1]$ 上でその絶対値（modulus）が最大になるのは端点においてであり、$x = \pm 1$ での評価は $|f'(\pm 1)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4$ となる。)

等号が成り立つ例

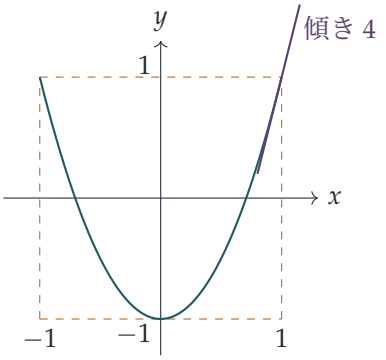
$x = 1$ で等号が成り立つためには、そこで上の各段階がすべて等号でなければならない。$x = 1$ において、係数 $x + \frac{1}{2}$、$x - \frac{1}{2}$、$-2x$ はそれぞれ $\frac{3}{2}$、$\frac{1}{2}$、-2 である。したがって $f'(1) = +4$ とするには、

$$f(1) = 1, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(0) = -1.$$

であればよい。これより $c = -1$、$a + b + c = 1$、$a - b + c = 1$ となるので、$b = 0$、$a = 2$ である：

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -1, \qquad f(x) = 2x^2 - 1.$$

ここで条件を確かめる。$|x| \le 1$ のとき $0 \le x^2 \le 1$ であるから $-1 \le 2x^2 - 1 \le 1$、すなわち $|f(x)| \le 1$ である。また $f'(x) = 4x$ であるから、区間内の $x = 1$ において $f'(1) = 4$ となる。これが求める例である。



曲線 $y = 2x^2 - 1$（青緑色）は正方形 $|x| \leq 1$、$|y| \leq 1$ の内部にとどまりながら、上端から下端へ、そしてまた上端へと振れる。そのため、両端では可能な限り急な傾きになっている。

（$\pm(2x^2-1)$ のいずれでも $|f'(\pm 1)| = 4$ となる。$f(x) = 2x^2 - 1$ を選ぶと $f'(1) = +4$ となり、$-(2x^2-1)$ も $x = -1$ において同じ値を与える。）

検算

- $f(x) = x^2 + x + 1$ で試す：$f(1) = 3$、$f(-1) = 1$、$f(0) = 1$ である。$x = 2$ において恒等式は $3 \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot 2 = 5 = f'(2)$ を与える。
- $\max_{|x|\leq 1} |f(x)| = 1$ となるように正規化した 20,000 個の二次関数をランダムに探索したところ、$\max_{|x|\leq 1} |f'(x)| = 2|a| + |b|$ が 4 を超えるものは見つからなかった（最大値は約 3.91 であった）。一方、$2x^2 - 1$ はちょうど 4 に達する。

よくある間違い

- $\left|x + \frac{1}{2}\right|$ と $\left|x - \frac{1}{2}\right|$ をそれぞれ別々に $\frac{3}{2}$ で抑えてしまう。これでは $|f'(x)| \leq 5$ しか得られない。2 つの距離はまとめて評価しなければならない。
- 0 と ± 1 だけでなく区間全体で $|f(x)| \leq 1$ が成り立つことを確かめずに、例を提示してしまう。

STEP のその先へ

これはマルコフ（Markov）の不等式（Markov's inequality）の 2 次の場合である。すなわち、n 次多項式 p が $[-1, 1]$ 上で $|p| \leq 1$ を満たすならば、そこで $|p'| \leq n^2$ が成り立つ。等号はチェビシェフ（Chebyshev）多項式（Chebyshev polynomial）$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$

によって達成され、$2x^2 - 1 = T_2(x)$ である。指定した点での値を用いて多項式を表すことはラグランジュ（Lagrange）補間（Lagrange interpolation）と呼ばれ、数値解析（numerical analysis）や近似理論（approximation theory）の基本的な道具である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。