解答例

STEP I 1988、第 6 問

純粋数学 ・ 複素数と図形

> **STEP I 1988、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q6

鍵となる考え方

複素数平面（Argand diagram）において、ベクトル $\overrightarrow{P_jP_k}$ は複素数 $z_k - z_j$ そのものである。したがって、ベクトルが等しいことは差が等しいことになり、垂直であることは「一方の差を他方の差で割ったものが純虚数（purely imaginary）である」ことになる。与えられた値を代入すると、条件 (i) により z_4 と w が z で表され、条件 (ii) により z の虚部が決まる。すると六角形はその中心に関して対称であることがわかり、凸性（convexity）と最後の角の扱いが容易になる。

解答

条件の言い換え

$\overrightarrow{P_jP_k}$ は $z_k - z_j$ で表されるから、条件 (i) は

$$z_2 - z_1 = z_4 - z_5 \qquad \text{かつ} \qquad z_3 - z_2 = z_5 - z_6.$$

を意味する。(ii) については、0 でない二つのベクトル u と v が垂直であるのは、偏角の差が $\pm\frac{\pi}{2}$ であるとき、すなわち u/v が純虚数であるときに限る。各点は相異なるので $z_4 - z_2 \neq 0$ かつ $z_6 - z_3 \neq 0$ であり、条件 (ii) は

$$\frac{z_4 - z_2}{z_6 - z_3} \text{ は純虚数、} \qquad \text{同値な言い換えとして} \qquad \operatorname{Re}\left[(z_4 - z_2)\,\overline{(z_6 - z_3)}\right] = 0.$$

を意味する。

(i) から導かれること

(i) の二つの等式を辺々加えると、z_2 と z_5 の項が消えて

$$z_3 - z_1 = z_4 - z_6, \qquad \text{よって} \qquad z_4 - z_3 = z_6 - z_1,$$

となる。これは $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$ という主張そのものであり、示すべきことが示された。

六角形

ここで $z_1 = 0$、$z_2 = 1$、$z_3 = z$、$z_5 = \mathrm{i}$、$z_6 = w$ とおく。(i) の第一の等式から

$$z_4 = z_5 + z_2 - z_1 = 1 + \mathrm{i},$$

が得られ、第二の等式から $z - 1 = \mathrm{i} - w$ が得られるので

$$w = 1 + \mathrm{i} - z.$$

である。$z_1 + z_4 = z_2 + z_5 = z_3 + z_6 = 1 + \mathrm{i}$ となっていることに注意する。すなわち向かい合う頂点どうしは点 $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$ に関して対称であり、この六角形は対称の中心（centre of symmetry）をもつ。

(ii) については、$z_4 - z_2 = \mathrm{i}$ かつ $z_6 - z_3 = w - z = 1 + \mathrm{i} - 2z$ である。商 $\mathrm{i}/(1 + \mathrm{i} - 2z)$ が純虚数となるのは $1 + \mathrm{i} - 2z$ が実数となるとき、すなわち $1 - 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$ のときに限る。よって

$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{このとき} \qquad \mathrm{Im}(w) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

である。a を実数として $z = a + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ と書く。すると $w = (1 - a) + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ であり、常に $\mathrm{Re}(w) = 1 - \mathrm{Re}(z)$ が成り立つ。六つの頂点は

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (a, \tfrac{1}{2}), \quad (1,1), \quad (0,1), \quad (1-a, \tfrac{1}{2}) :$$

であり、単位正方形の左右の辺それぞれの中ほどに「とがった点」を付け加えた形である。

考えてみよう 図に頼らずに凸性を確かめるにはどうすればよいか？

六角形の周を順にたどっていく。六角形が凸であるのは、各頂点で常に同じ向きに曲がるときに限る。ある頂点での曲がる向きは、入ってくる辺 u と出ていく辺 v の外積（cross product）$\mathrm{Im}(\bar{u}v) = u_x v_y - u_y v_x$ の符号で測られる。各辺は

$$P_1P_2 = (1,0), \quad P_2P_3 = (a-1, \tfrac{1}{2}), \quad P_3P_4 = (1-a, \tfrac{1}{2}),$$
$$P_4P_5 = (-1,0), \quad P_5P_6 = (1-a, -\tfrac{1}{2}), \quad P_6P_1 = (a-1, -\tfrac{1}{2}),$$

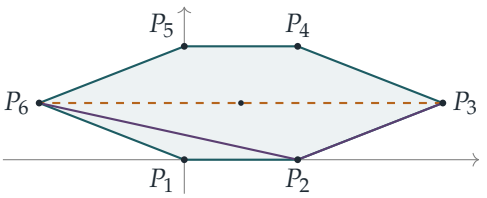
であり、$P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_1$ における外積は順に

$$\tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}, \qquad a-1, \qquad \tfrac{1}{2}.$$

である。このうち四つは a によらず正であるから、六角形が凸であるための必要十分条件は $a-1>0$ である。（$a=1$ のときは P_3 が線分 P_2P_4 上にあり、本当の六角形にはならない。）幾何的にいえば、P_3 は正方形の辺 $x=1$ より右側になければならず、対称性により P_6 は $x=0$ より左側になければならない。よって求める条件は

$$\boxed{\mathrm{Re}(z)>1 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{Re}(w)=1-\mathrm{Re}(z) \ (\text{したがって}\mathrm{Re}(w)<0)}$$

である（これに加えて $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w)=\frac{1}{2}$ であるが、これは (ii) によりすでに強制されている）。



距離 P_3P_6

P_2 から出る二本の線分は

$$z_3-z_2=(a-1)+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}, \qquad z_6-z_2=-a+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

である。角 $\theta=\angle P_3P_2P_6$（0 以上 π 以下）について、二本の線分の内積（dot product）は $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\cos\theta$ を与え、外積の大きさは $|P_2P_3|\,|P_2P_6|\sin\theta$ を与える：

$$\text{内積}=-a(a-1)+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}(1+4a-4a^2), \qquad \text{外積}=(a-1)\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot(-a)=\tfrac{1}{2}(2a-1).$$

$a>1$ のとき外積は正であるから、これはちょうど $\sin\theta$ の項に一致し、

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}(2a-1)}{\frac{1}{4}(1+4a-4a^2)}=\frac{2(2a-1)}{1+4a-4a^2}.$$

となる。これを $-\frac{2}{3}$ に等しいとおくと

$$3(2a-1)=-(1+4a-4a^2) \quad\Longrightarrow\quad 4a^2-10a+2=0 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2-5a+1=0,$$

よって $a=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{17})$ である。マイナスの符号では $a\approx 0.22$ となり、凸性の条件 $a>1$ を満たさない。プラスの符号では $a\approx 2.28>1$ となる。（このとき分母 $1+4a-4a^2$ は負なので、θ は鈍角であり、タンジェントが負であることと整合する。）

最後に、P_3 と P_6 は虚部が等しいので

$$P_3P_6 = |z-w| = |2a-1| = 2a-1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} - 1 = \boxed{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \approx 3.56.$$

である。

凸性の要請を外すと、同じ方法（このとき分子は $|2a-1|$ となる）によってもう一つの解 $a = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})$ が得られる。これは z と w を入れ替える鏡映 $a \mapsto 1-a$ による像にすぎず、同じ距離 $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$ を与える。

検算

- 対称性：$z_1+z_4 = z_2+z_5 = z_3+z_6$ であるから、結果 $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_1P_6}$ は、中心対称な六角形の三組目の対辺についての主張にほかならない。
- $a = \frac{1}{4}(5+\sqrt{17}) \approx 2.2808$ として $\arg\left((z_6-z_2)/(z_3-z_2)\right)$ を直接計算すると、タンジェントが -0.66667 となる角が得られ、また $|z-w| \approx 3.5616 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$ となる。
- a を -5 から 5 まで動かして数値的に凸性を調べると、六角形が凸となるのはちょうど $a > 1$ のときであることが確認できる。

よくある間違い

- ベクトルの向きを取り違えること：$\overrightarrow{P_5P_4}$ は $z_4 - z_5$ であり、$z_5 - z_4$ ではない。
- 垂直条件を「傾きの積が -1」と書き、鉛直な場合を取りこぼすこと。ここでは $\overrightarrow{P_2P_4}$ が鉛直であり、商による判定法ならこれをすっきり扱える。
- 根 $a = \frac{1}{4}(5-\sqrt{17})$ を残してしまうこと。これは凸な六角形を与えない（しかも実際にはそこで $\tan\theta > 0$ となる）。

STEP のその先へ

点を複素数として扱うと、幾何が代数に変わる。平行移動は加法になり、回転と拡大・縮小は乗法になる。「u/v が純虚数である」という判定法は、角が偏角になる一つの例である。凸性を外積の符号で判定する方法は、計算幾何学（computational geometry）における標準的な凸包（convex hull）アルゴリズムの基礎となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は、複素数のこうした幾何的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。