解答例

STEP I 1988、第 5 問

純粋数学 ・ 級数と母関数

> **STEP I 1988、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q5

鍵となる考え方

各因数を等比級数（geometric series）として展開し（指数 -1 の二項定理（binomial theorem））、それらを掛け合わせる。すると c_m は有限の等比数列の和となり、簡潔な閉じた形（closed form）をもつ。c_m^2 を 3 つの純粋なべき $(a^2)^m$、$(ab)^m$、$(b^2)^m$ の結合として書いてしまえば、最後の級数は 3 つの等比級数に分かれる。あとは分数の計算を丁寧に行い、各級数がどこで収束（converge）するかを追跡すればよい。

解答

c_m を求める

指数 -1 の二項定理により、

$$(1-ax)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k \quad (|ax|<1), \qquad (1-bx)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} b^j x^j \quad (|bx|<1).$$

$0 < a < b$ であるから、条件 $b|x| < 1$ より $a|x| < b|x| < 1$ となり、両方の展開が成り立つ。どちらの級数も絶対収束（converge absolutely）するので、掛け合わせて x のべきごとにまとめてよい。x^m の係数は $k + j = m$ となる組から生じる：

$$c_m = \sum_{k=0}^{m} a^k b^{m-k} = b^m + ab^{m-1} + \cdots + a^{m-1}b + a^m.$$

これは初項 b^m、公比（common ratio）a/b、項数 $m+1$ の等比数列の和である。$a \neq b$ であるから、その和は

$$c_m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{b-a}.$$

（同値な言い方をすれば、$(b-a)c_m = b^{m+1} - a^{m+1}$ である。展開すると和の項が次々に打ち消し合うからである。）

c_m^2 の公式

2乗して $(b-a)^2 = (a-b)^2$ を用いると、

$$c_m^2 = \frac{(b^{m+1} - a^{m+1})^2}{(b-a)^2} = \frac{a^{2m+2} - 2(ab)^{m+1} + b^{2m+2}}{(a-b)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

級数 $\sum c_m^2 x^m$

前の公式の要点は、各項が定数と m 乗の積になっていることである：

$$c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^2\,(a^2x)^m - 2ab\,(abx)^m + b^2\,(b^2x)^m\right).$$

したがって $\sum c_m^2 x^m$ は、公比がそれぞれ a^2x、abx、b^2x である3つの等比級数の結合である。

考えてみよう どのような x に対して、3つの等比級数がすべて収束するか。

$|a^2x| < 1$、$|abx| < 1$、$|b^2x| < 1$ が必要である。$0 < a^2 < ab < b^2$ であるから、最後の条件が最も強く、他の2つを導く。よって3つすべてが収束するのは、ちょうど $|x| < 1/b^2$ のときである。このとき、各等比級数を足し合わせると

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 x^m = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2x} - \frac{2ab}{1-abx} + \frac{b^2}{1-b^2x}\right).$$

すべてを共通分母 $(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)$ で通分する。分子は

$$N = a^2(1-abx)(1-b^2x) - 2ab(1-a^2x)(1-b^2x) + b^2(1-a^2x)(1-abx).$$

これを x のべきごとに整理する：

$$\begin{aligned}
\text{定数項：}\quad & a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,\\
\text{係数}x\text{：}\quad & -a^2(ab+b^2) + 2ab(a^2+b^2) - b^2(a^2+ab)\\
& \qquad = a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 = ab(a-b)^2,\\
\text{係数}x^2\text{：}\quad & a^2\cdot ab^3 - 2ab\cdot a^2b^2 + b^2\cdot a^3b = 0.
\end{aligned}$$

よって $N = (a-b)^2(1+abx)$ である。因数 $(a-b)^2$ が約分され、次が残る：

$$c_0^2 + c_1^2 x + c_2^2 x^2 + \cdots = \frac{1+abx}{(1-abx)(1-a^2x)(1-b^2x)} \qquad \text{ただし} -\frac{1}{b^2} < x < \frac{1}{b^2}.$$

この区間をこれ以上広げることはできない。$x = \pm 1/b^2$ では、各項は

$$|c_m^2 x^m| = \frac{(b^{m+1} - a^{m+1})^2}{(b-a)^2\, b^{2m}} = \frac{b^2(1-(a/b)^{m+1})^2}{(b-a)^2} \to \frac{b^2}{(b-a)^2} \neq 0,$$

を満たすので、そこで級数は発散（diverge）する。また $|x| > 1/b^2$ でも、項が限りなく大きくなるので発散する。

検算

$a = 1$、$b = 2$ とする。このとき $c_m = 2^{m+1} - 1$ であるから $c_0, c_1, c_2 = 1, 3, 7$ であり、直接計算しても $\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + 2x + 4x^2 + \dots) = 1 + 3x + 7x^2 + \cdots$ となる。2 乗は $1, 9, 49$ である。一方、$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-4x)} = 1 + 7x + 35x^2 + \cdots$ であり、これに $1 + 2x$ を掛けると $1 + 9x + 49x^2 + \cdots$ となって、確かに一致する。数値的にも、$a = 0.7$、$b = 1.3$、$x = 0.3$ として $c_m^2 x^m$ を多くの項まで足し合わせると $4.163878\dots$ となり、閉じた形の値と一致する。

よくある間違い

- 最初の部分からそのまま写して、区間を $b|x| < 1$ としてしまう。新しい級数の公比は a^2x、abx、b^2x であるから、条件は $b^2|x| < 1$ である。
- c_m を和の形のまま放置する。閉じた形 $(b^{m+1} - a^{m+1})/(b-a)$ こそが、問題の残りの部分を解けるようにするものである。
- N における x の係数の符号の誤り。うまく工夫しようとするよりも、各積を 1 項ずつ丁寧に展開するほうが早い。

STEP のその先へ

級数 $\sum c_m x^m$ は数列 c_m の**母関数**（*generating function*）であり、この問題は、数列が有理関数（rational function）の母関数をもつならば、その 2 乗の数列もまた有理関数の母関数をもつことを示している。これは 2 つの有理的なべき級数（power series）の**アダマール積**（*Hadamard product*）の特別な場合であり、アダマール積は常に有理的である。ここで求めた区間は**収束半径**（*radius of convergence*）の一例である。有理関数のべき級数は、最も近い極（pole）、ここでは $x = 1/b^2$ まで収束する。母関数については Wilf の *generatingfunctionology* で見事に展開されており、べき級数とその収束については Abbott の *Understanding Analysis* で丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。