解答例

STEP I 1988、第 4 問

純粋数学 • 直線の交点の個数

> **STEP I 1988、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q4

鍵となる考え方

すべての線分を一度に思い描こうとしてはならない。代わりに、2 本の線分が交わるのはどのようなときかを問うのである。その答えは両軸上での端点の並び順だけで決まり、これによって各交点は各軸から 2 点ずつを選ぶことに対応する。1 本の線分上の交点を数えられるようになれば、交点が最多・最少の線分と最終的な平均（average）は、丁寧に数え上げることで求まる。

解答

y 軸上の点を原点 O からの距離が小さい順に $B_1, \ldots, B_m$ とし、x 軸上の点も同様に $A_1, \ldots, A_n$ とする。線分（segment）B_iA_j を s_{ij} と書く。

小問 (i)

m 個の点 B_i のそれぞれが n 個の点 A_j のそれぞれと結ばれるので、線分の本数は

$$mn$$

である。

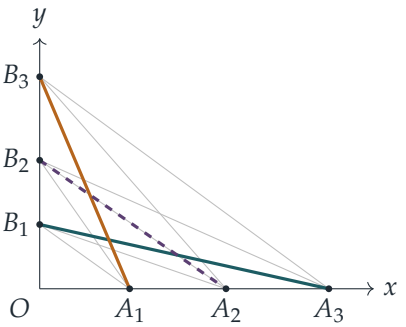
小問 (ii)

異なる 2 本の線分 s_{ij} と s_{kl} をとる。

- $i = k$ または $j = l$ のとき、2 本は端点を共有する。共通の点から出る異なる 2 本の線分はその点でしか交わらず、そのような交わりは数えない。

- $i < k$ かつ $j < l$ のとき、B_i と A_j はともに直線 B_kA_l に関して O と同じ側にある（これらは三角形 OB_kA_l の辺 OB_k と OA_l 上にあり、B_k や A_l とは一致しない）。両端点が直線の一方の側に厳密に含まれる線分はその側から出ないので、s_{ij} は s_{kl} と交わらない。s_{ij} はその下に「入れ子」になっているのである。
- $i < k$ かつ $j > l$ のとき、B_i は直線 B_kA_l に関して O と同じ側にあり、A_j は反対側にある。よって s_{ij} はその直線を横切る。同様に、A_l は直線 B_iA_j に関して O の側にあり、B_k は反対側にある。それぞれの線分がもう一方の線分の端点を分けるので、2 本の線分はちょうど 1 点で交わり、その点は端点ではない。

$i > k$ の場合は役割を入れ替えれば同じである。



図（$m = n = 3$）において、青緑色の s_{13} と琥珀色の s_{31} は端点の並び順が逆なので交わる。破線の s_{22} もそれぞれと交わる。

したがって、内部の点で交わる線分の組はどれも、2 点 B_i, B_k（$i < k$）と 2 点 A_j, A_l（$j < l$）を選び、s_{il} と s_{kj} をとることで得られる。逆に、このような選び方はそれぞれちょうど 1 組の交わる線分の組を与える。3 本の線分が共通の内部の点を通ることはないので、異なる組は異なる点を与える。よって交点（point of intersection）の個数は

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2} = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

である。

平均

1 本の線分上の交点。上の規則により、s_{ij} が s_{kl} と交わるのは $k < i,\ l > j$ または $k > i,\ l < j$ のときに限る。よって s_{ij} 上の交点の個数は

$$c_{ij} = (i-1)(n-j) + (m-i)(j-1).$$

である。

$m = n$ のときの交点が最多・最少の線分。$N = n - 1$、$a = i - 1$、$b = j - 1$ とおくと $0 \leq a, b \leq N$ であり、

$$c_{ij} = a(N-b) + (N-a)b = N(a+b) - 2ab = \tfrac{1}{2}\big(N^2 - (N-2a)(N-2b)\big),$$

となる。これは展開すれば確かめられる。$|N-2a| \leq N$ かつ $|N-2b| \leq N$ であるから、積 $(N-2a)(N-2b)$ は $-N^2$ 以上 N^2 以下である。したがって $0 \leq c_{ij} \leq N^2$ であり、

- $c_{ij} = N^2$ となるのは $(N-2a)(N-2b) = -N^2$、すなわち $\{a, b\} = \{0, N\}$ のときに限る。これは 2 本の線分 s_{1n} と s_{n1} である。
- $c_{ij} = 0$ となるのは $(N-2a)(N-2b) = N^2$、すなわち $a = b = 0$ または $a = b = N$ のときに限る。これは 2 本の線分 s_{11} と s_{nn} である。

（ここで $N \geq 2$ なので、これら 4 本の線分は互いに異なる。）よって、最多の $(n-1)^2$ 個の点をもつ線分はちょうど 2 本、最少の 0 個の点をもつ線分もちょうど 2 本である。これらを取り除くと $n^2 - 4$ 本の線分が残る。

? 考えてみよう いったい何の平均をとっているのか？

4 本の線分を取り除いた後に残る交点、すなわち残った 2 本の線分どうしの交点を、各点を 1 回ずつ数える。そしてそれを残った線分の本数で割る。（代わりに残った各線分上の交点を足し合わせると、各点が 2 回ずつ数えられ、さらに失われた点の一部もまだ数えられてしまう。その結果は $\frac{1}{2}(n-1)^2$ となり、求める答えにはならない。「よくある間違い」を参照のこと。）

失われる点。線分 s_{11} と s_{nn} は交点をもたないので、取り除いても何も失われない。線分 s_{1n} と s_{n1} はそれぞれ $(n-1)^2$ 個の点をもつ。この 2 本は互いに交わる（$1 < n$ かつ $n > 1$）ので、両方に乗る点はちょうど 1 個である。包除原理（inclusion–exclusion）により、失われる点の個数は $2(n-1)^2 - 1$ である。

残る点。小問 (ii) で $m = n$ とすると、残る点の個数は

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n-1)^2}{4} - 2(n-1)^2 + 1 &= \frac{(n-1)^2(n^2-8)+4}{4} \\ &= \frac{n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4}{4} \\ &= \frac{(n-2)(n^3 - 7n + 2)}{4}.\end{aligned}$$

である。因数分解（factorisation）については、$n = 2$ のとき 4 次式が $16 - 16 - 28 + 32 - 4 = 0$ となるので、$n - 2$ が因数であることに注意する。$(n-2)(n^3 - 7n + 2) = n^4 - 2n^3 - 7n^2 + 16n - 4$ と展開すれば確認できる。

平均。残った $n^2-4=(n-2)(n+2)$ 本の線分で割り、$n-2\neq 0$（$n\geq 3$ より）で約分すると、平均は

$$\frac{(n-2)(n^3-7n+2)}{4(n-2)(n+2)}=\frac{n^3-7n+2}{4(n+2)},$$

となり、題意が示された。

検算

$n=3$ のとき、公式は $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ を与える。直接確かめると、$s_{11},s_{33},s_{13},s_{31}$ を取り除くと $s_{12},s_{21},s_{22},s_{23},s_{32}$ が残る。このうち端点の並び順が逆になっているのは s_{12} と s_{21}、および s_{23} と s_{32} の組だけなので、5 本の線分に対して点は 2 個であり、$\frac{2}{5}$ となる。コンピュータによる検証では、両軸上に無作為に点を配置し、厳密な演算ですべての交点を求めて、mn、$\binom{m}{2}\binom{n}{2}$、c_{ij} を確認した。さらに、3 から 29 までのすべての n について平均の公式も確認した。

よくある間違い

- 残った各線分上の交点を足し合わせてしまう。各点は 2 本の線分に乗るのでこれは二重に数えることになり、しかも取り除いた線分と共有する点もまだ含まれている。結果は $\frac{1}{2}(n-1)^2$ となり、与えられた公式にはならない。
- s_{1n} と s_{n1} が互いに交わることを忘れ、$2(n-1)^2-1$ ではなく $2(n-1)^2$ を引いてしまう。
- 交点を線分の組 $\binom{mn}{2}$ 個として数えてしまう。ほとんどの組は端点を共有するか入れ子になっていて、交わらない。

STEP のその先へ

この問題の核心は全単射（bijection）である。すなわち、交点は各軸から 2 点ずつを選ぶことにちょうど対応する。これは組合せ論（combinatorics）の基本的な道具である。同じ図は完全二部グラフ（complete bipartite graph）$K_{m,n}$ の「交差数（crossing number）」にも現れる。Zarankiewicz の描画（各軸の両側に点を置いた、まさにこの描き方）は $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ 個の交差を用いるが、これが常に最小であるかどうかはいまだ未解決問題（open problem）である。全単射による数え上げをさらに学ぶには Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を、グラフ理論については Wilson の *Introduction to Graph Theory* を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。