解答例

STEP I 1988、第 3 問

純粋数学 • 幾何的な極値の評価

> **STEP I 1988、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q3

鍵となる考え方

正方形の点が O から**遠い**とき、その点はどこにありうるかを考える。そのような点は、反対側の頂点の近くにある小さな領域に押し込められていなければならない。P と Q がともに O から遠ければ、両方ともその小さな領域に入るので、互いに近い。$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ という数はまさにこの議論がうまくいく大きさであり、正方形の中に対称に置かれた正三角形（equilateral triangle）から生じる。

解答

単位はセンチメートルとし、O を原点、正方形を $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ とする。

$$s = \sqrt{6}-\sqrt{2}, \qquad s^2 = 6+2-2\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3} \approx 1.072,$$

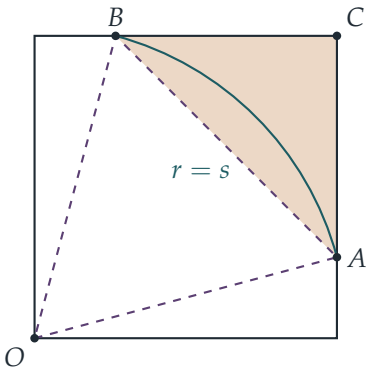
とおき、さらに $t = 2-\sqrt{3} \approx 0.268$ とする。点を次のように定める。

$$A = (1, t), \qquad B = (t, 1), \qquad C = (1, 1).$$

このとき

$$\begin{aligned} OA^2 = OB^2 &= 1 + (2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AB^2 &= 2(1-t)^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3} = s^2, \\ AC = BC &= 1-t = \sqrt{3}-1 \approx 0.732 < s. \end{aligned}$$

よって OAB は正方形の内部にある一辺 s の正三角形である。



青緑色の弧は O を中心とする半径 s の円である。正方形のうちこの弧より外側の部分は、影をつけた三角形 ABC の内部にある。

ステップ1：O から遠い点は三角形 ABC の中にある

直線 AB は $x+y=1+t$ である。正方形のうち、この直線に関して O の側にある部分 $\{x+y\le 1+t\}$ を考える。これは次の点を頂点とする五角形（pentagon）である。

$$O=(0,0),\quad (1,0),\quad A,\quad B,\quad (0,1).$$

関数 x^2+y^2 は凸関数（convex function）であるから、この凸五角形上での最大値はある頂点でとられる。各頂点での値は $0, 1, s^2, s^2, 1$ であり、最大は s^2 である。したがって、正方形のすべての点について

$$x+y\le 1+t \implies x^2+y^2\le s^2$$

が成り立つ。これを裏返すと、正方形の点 (x,y) の O からの距離が s **より大きい**ならば $x+y>1+t$ であり、$x\le 1$ かつ $y\le 1$ であるから、その点は三角形 ABC の中にある。

> **考えてみよう** 三角形の2点間の距離の最大値が、その三角形の辺のいずれかの長さになるのはなぜか。

Q を固定する。距離 $|PQ|$ は P の凸関数であるから、三角形上では P が頂点のときに最大となる。次にその頂点を固定して Q を動かすと、同じ議論により Q も頂点としてよい。よって三角形の2点間の距離の最大値は2つの頂点の間の距離、すなわち最も長い辺の長さである。

ステップ2：矛盾

$OP>s$ かつ $OQ>s$ と仮定する（そうでなければすでに示すべきことは成り立っている）。ステップ1により、P と Q はともに三角形 ABC の中にある。この三角形の最も

長い辺は $AB = s$ である（他の 2 辺は $\sqrt{3} - 1 < s$）。よって上の囲みにより

$$PQ \leq s.$$

したがって、どの場合にも OP, PQ, QO の少なくとも 1 つは $s = (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm 以下であり、これが示すべきことであった。

この評価は最良である

$P = A, Q = B$ とすると、ちょうど $OP = PQ = QO = s$ となるので、これより小さい数では成り立たない。$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから $s = \sec 15^\circ$ である。極端な場合の三角形は、対角線に関して対称に置かれた正三角形であり、OA と OB はそれぞれ正方形の辺と 15° の角をなす。

検算

- $s \approx 1.0353$ は正方形の一辺より少し大きく、対角線 $\sqrt{2} \approx 1.414$ よりかなり小さい。これは妥当である。
- 数値的に、正方形内の 10^6 組のランダムな点 P, Q について、$\min(OP, PQ, QO)$ が s を超えることは一度もなかった（最大はおよそ 1.0235）。最小値をできるだけ大きくする山登り法（hill-climbing）による探索は $P \approx (1, 0.26795)$, $Q \approx (0.26795, 1)$、値 1.035276 に落ち着き、A, B, s と一致した。

よくある間違い

- $OP, OQ > s$ のとき $\angle POQ < 60^\circ$ であることだけを論じる。これは正しいが、それだけでは PQ が最短の辺になるとはいえないので、さらに議論を加えなければ証明は完結しない。
- 対称な配置だけを調べる。これは評価が改良できないことを示すが、すべての P と Q について評価が成り立つことの証明にはならない。

STEP のその先へ

これは点の配置に関する小さな極値問題（extremal problem）である。ある領域の 3 点を、すべて同時にどこまで互いに離せるか、という問いである。このような問いは詰め込み問題（packing problem）や被覆問題（covering problem）へとつながり、また集合の**直径**（diameter）という概念にもつながる。集合の直径はその凸包（convex

hull）の直径と等しい。この事実のおかげで、ステップ 2 は楽に済んだのである。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。