解答例

STEP I 1988、第 2 問

純粋数学 ・ 停留点

> **STEP I 1988、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q2

鍵となる考え方

g を合成関数（composition）とみなす。すなわち $h(t) = t + 1/t$ として $\mathrm{g} = h \circ \mathrm{f}$ である。すると合成関数の微分法（chain rule）により、g' が 0 になるのは $\mathrm{f}' = 0$ となるところか、$h'(\mathrm{f}) = 0$ となるところ、つまり $\mathrm{f} = \pm 1$ となるところである。$\cos 2x$ を $\sin x$ で表すと、f は $\sin x$ の 2 次式になり、その大きさと形についてすべてがわかる。

解答

導関数

$\mathrm{g} = \mathrm{f} + \mathrm{f}^{-1}$ を合成関数の微分法で微分すると、

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{f}'(x) - \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)^2} = \mathrm{f}'(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right).$$

さらに積の微分法（product rule）でもう一度微分し、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\mathrm{f}^{-2}) = 2\mathrm{f}^{-3}\mathrm{f}'$ を用いると、

$$\mathrm{g}''(x) = \mathrm{f}''(x)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{f}(x)^2}\right) + \frac{2\,\mathrm{f}'(x)^2}{\mathrm{f}(x)^3}.$$

f の大きさ

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ を用い、$s = \sin x$ とおくと、

$$\mathrm{f}(x) = 5 + 2s - 2s^2 = \tfrac{11}{2} - 2\left(s - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

s が $[-1,1]$ を動くとき、これは $s=\frac{1}{2}$ で最大（$\frac{11}{2}$）となり、区間の端点のうち $\frac{1}{2}$ から遠い方、すなわち $s=-1$ で最小となって、そのとき値は 1 である。よって

$$1 \le \mathrm{f}(x) \le \tfrac{11}{2} \quad \text{任意の} x,$$

であり、$\mathrm{f}(x)=1$ となるのは $\sin x=-1$ のときに限る。特に f は決して 0 にならないので、g はいたるところで定義される。

停留点

$\mathrm{g}'(x)=0$ となるのは、ちょうど $\mathrm{f}'(x)=0$ または $\mathrm{f}(x)^2=1$ のときである。

f' の零点。

$$\mathrm{f}'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x = 2\cos x\,(1-2\sin x),$$

であり、これは $\cos x=0$ または $\sin x=\frac{1}{2}$ のとき 0 になる。$[0,2\pi]$ においては

$$x = \tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{5\pi}{6},\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

$\mathrm{f}=\pm 1$ となる点。 $\mathrm{f}\ge 1$ であるから、これは $\mathrm{f}=1$、すなわち $\sin x=-1$、すなわち $x=\frac{3\pi}{2}$ を意味し、これはすでに上の一覧に含まれている。

したがって、g は $[0,2\pi]$ においてちょうど 4 つの停留点（stationary point）をもつ。（端点はこれに含まれない。実際 $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{g}'(2\pi)=2\cdot\frac{24}{25}\neq 0$ である。）

停留点の分類

$\mathrm{f}''(x) = -4\cos 2x - 2\sin x$ である。各停留点では $\mathrm{f}'=0$ なので、g'' の第 2 項は消え、$\mathrm{g}''=\mathrm{f}''\,(1-\mathrm{f}^{-2})$ となる。

- $x=\frac{\pi}{6}$ と $x=\frac{5\pi}{6}$：ここでは $\sin x=\frac{1}{2}$、$\cos 2x=\frac{1}{2}$ なので、$\mathrm{f}=\frac{11}{2}$、$\mathrm{f}''=-2-1=-3$ である。よって $\mathrm{g}''=-3\left(1-\frac{4}{121}\right)<0$ となり、どちらも**極大**であって、

$$\mathrm{g} = \tfrac{11}{2}+\tfrac{2}{11} = \tfrac{125}{22}.$$

- $x=\frac{\pi}{2}$：ここでは $\sin x=1$、$\cos 2x=-1$ なので、$\mathrm{f}=5$、$\mathrm{f}''=4-2=2$ である。よって $\mathrm{g}''=2\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{48}{25}>0$ となり、**極小**であって、$\mathrm{g}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}$ である。
- $x=\frac{3\pi}{2}$：ここでは $\mathrm{f}=1$ なので $1-\mathrm{f}^{-2}=0$ であり、さらに $\mathrm{f}'=0$ でもある。したがって $\mathrm{g}''=0$ となる。

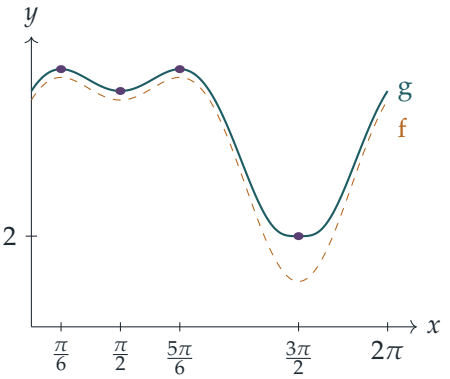
考えてみよう $x=\frac{3\pi}{2}$ では 2 階導関数による判定法（second-derivative test）が使えない。ほかにどのような方法で判定できるだろうか。

$h(t) = t + 1/t$ に立ち返ろう。$t > 0$ のとき

$$t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0,$$

であり、等号が成り立つのは $t = 1$ のときに限る。$\mathrm{f} > 0$ であるから、すべての x に対して $\mathrm{g}(x) \geq 2$ が成り立ち、等号が成り立つのはちょうど $\mathrm{f}(x) = 1$ のときである。$x = \frac{3\pi}{2}$ では $\mathrm{g} = 2$ であるから、この点は**極小**である（実際、g の最小値を与える）。

まとめ。極大は $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$（値 $\frac{125}{22}$）、極小は $x = \frac{\pi}{2}$（値 $\frac{26}{5}$）と $x = \frac{3\pi}{2}$（値 2）である。



検算

- h は $t > 1$ で増加するので、$\mathrm{f} > 1$ であるところでは g は f と一緒に増減するはずである。グラフを見ると、確かに f（破線）と g は同じところで増減が入れ替わっている。
- 数値的には $\mathrm{g}(\frac{\pi}{6}) \approx 5.6818 = \frac{125}{22}$、$\mathrm{g}(\frac{\pi}{2}) = 5.2$ である。$[0, 2\pi]$ 上で g を細かく調べると、増減が入れ替わる点は $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ のみであり、最小値は 2.000 である。
- g'' の式は、無作為に選んだ点において差分による 2 階導関数の近似値と一致する。

よくある間違い

- 因子 $1 - \mathrm{f}^{-2}$ を見落とすこと。この問題では新たな停留点は生じないが、それは $\mathrm{f} = 1$ となる点がたまたま $\mathrm{f}' = 0$ となる点でもあるからにすぎない。それでも確認は必要である。
- $\mathrm{g}''(\frac{3\pi}{2}) = 0$ から、その点を変曲点（point of inflection）だと結論すること。2 階導関数が 0 であるというだけでは何もわからない。

STEP のその先へ

退化した点 $x = \frac{3\pi}{2}$ は合成関数に典型的なものである。f が極小となる点で h も極小となるならば、$h \circ \mathrm{f}$ はそこでより「平坦」になり、2 階導関数が 0 になる。大学の解析学では、2 階導関数による判定法の代わりに、0 でない最初の導関数によってこのような点を分類するテイラーの定理（Taylor's theorem）や、（ここで行ったように）直接的な不等式を用いる。平均値の定理（mean value theorem）とテイラーの定理が丁寧に展開されているのを見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。