解答例

STEP I 1988、第 13 問

力学 ・ 弾性ひもと衝突

STEP I 1988、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s1-q13

鍵となる考え方

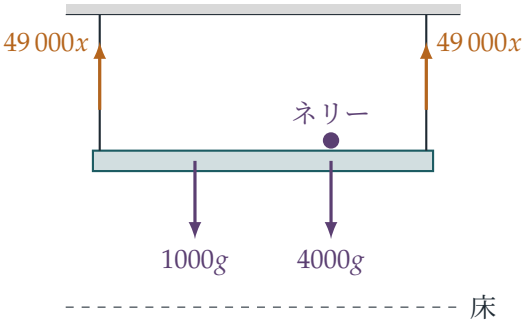
この問題は 3 つの段階に分かれ、それぞれに固有の保存則（conservation law）がある。ネリーの着地は瞬間的な非弾性衝突（inelastic collision）なので、運動量（momentum）は保存されるがエネルギーは保存されない。床までの下降では重力と弾性ロープだけがはたらくので、エネルギーが保存される。ネリーが降りたあとも再びエネルギーが保存される。そこで、蓄えられた弾性エネルギーが、ロープが自然長となる位置を越えるまで板を持ち上げるのに十分かどうかを調べればよい。

解答

板は水平を保つ剛体（rigid body）とみなし、鉛直方向に運動する質量 1000 kg の質点（particle）として扱う。ネリーは質量 4000 kg の質点であり、ロープはフックの法則（Hooke's law）に従う軽い弾性ひもとする。2 本のロープの伸び（extension）は常に等しく x であるから、2 本が合わせて及ぼす上向きの力は

$$2 \cdot \frac{490\,000}{10}\, x = 98\,000\, x \text{ N}.$$

である。したがって 2 本のロープは、ばね定数（stiffness）$K = 98\,000 \text{ N m}^{-1}$ の 1 本のばねのようにふるまい、その弾性エネルギー（elastic energy）は $\frac{1}{2}Kx^2 = 49\,000\, x^2$ J である。



初期位置

ネリーが来る前、板はつり合いの状態でぶら下がっているので、伸び e_0 は

$$98\,000\,e_0 = 1000 \times 9.8 \quad \Longrightarrow \quad e_0 = 0.1\ \text{m}.$$

を満たす。

着地

ネリーは板に着地してそのまま板の上にとどまるので、これは完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）である。衝突は非常に短い時間で起こり、ロープの張力や重力は有限の力であるから、衝突の間にこれらが与える力積（impulse）は無視できる。よって運動量は保存され、衝突直後の共通の速さ v は

$$4000 \times 5 = 5000\,v \quad \Longrightarrow \quad v = 4\ \text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

を満たす。

考えてみよう ネリーが到着した時点から、そのままエネルギー保存則を使えないだろうか？

使えない。ゾウが板に着地してそのままとどまるとき、多くの運動エネルギーが熱や音に変わる。ここでは $\frac{1}{2} \cdot 4000 \cdot 5^2 = 50\,000\,\text{J}$ が $\frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 4^2 = 40\,000\,\text{J}$ になるので、$10\,000\,\text{J}$ が失われる。エネルギーが保存されるのは、着地直後の瞬間からである。

下降

板の床からの最初の高さを h とする。板とネリー（合計質量 $5000\,\text{kg}$）は速さ $4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ で動き始め、距離 h だけ下の床で静止する。そのときの伸びは $0.1 + h$ である。仕事を

する力は重力とロープの張力だけなので、

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 5000\cdot 4^2}_{\text{失われた運動エネルギー}} + \underbrace{5000\cdot 9.8\,h}_{\text{失われた位置エネルギー}} = \underbrace{49\,000[(0.1+h)^2-0.1^2]}_{\text{増加した弾性エネルギー}},$$

$$40\,000 + 49\,000\,h = 49\,000\,(0.2h + h^2).$$

が成り立つ。両辺を 49 000 で割って整理すると

$$h^2 - 0.8\,h - \tfrac{40}{49} = 0, \qquad \text{よって} \qquad h = 0.4 + \sqrt{0.16 + \tfrac{40}{49}} = \frac{14+2\sqrt{299}}{35},$$

となる。ここで $h > 0$ であるから正の解をとった。したがって

$$h \approx 1.39 \text{ m}.$$

である。板が下がるにつれて伸びは増えるだけなので、この段階を通じてロープはずっと張ったままである。

ネリーが降りたあと

ネリーは静かに降りるので、板だけ（1000 kg）が床の位置で静止しており、そのときの伸びは

$$X = 0.1 + h \approx 1.488 \text{ m}.$$

である。板が十分に上昇して伸びが 0 まで減れば、ロープはたるむ。そのためには板が高さ X だけ上昇すればよい。ロープが張っている間はエネルギーが保存されるので、蓄えられた弾性エネルギーが位置エネルギーの増加分を上回れば、板はその高さに達する。

$$\tfrac{1}{2}KX^2 = 49\,000\,X^2 \approx 108\,500 \text{ J}, \qquad 1000\cdot 9.8\cdot X \approx 14\,600 \text{ J}.$$

前者のほうがはるかに大きいので、板は約 93 900 J の運動エネルギー（速さ約 13.7 m s^{-1}）をもったまま、まだ上向きに動きながら自然長（natural length）の位置に到達する。この点より上では、ロープは自然長より短くならなければならないので、たるんでいる。**よって、ロープはたるむ。**

考えてみよう 単振動を使えばすぐに済むのではないか？

ロープが張っている間ならそのとおりである。板だけの運動は、つり合いの伸び 0.1 m を中心とする単振動（simple harmonic motion, SHM）であり、板はその位置より $h \approx 1.39$ m 下から動き始めるので、振幅（amplitude）は 1.39 m である。振動の最高点では伸びが $0.1 - 1.39 < 0$ となるが、これは張ったロープではありえない。したがって、板が最高点に達する前にロープはたるまなければならない。（実際、単振動による議論では $h > 0.1$ でありさえすれば結論が得られる。）

ロープがたるむと、板は重力だけを受けて自由に運動し、さらに $13.7^2/(2\times 9.8)\approx 9.6\,\mathrm{m}$ 上昇する。これは 10 m より小さいので、板は（ぎりぎりで！）ロープの固定点に届くことなく落下に転じる。

検算

- エネルギーの式に $h=1.3881$ を代入すると、両辺はジュール単位で四捨五入して 108 017 J となる。
- $\ddot{x}=g-Kx/5000$ を $x=0.1, \dot{x}=4$ から数値的に追っていくと、板は 1.3881 m 下降したところで止まる。
- ネリーが降りたあとの板の運動を数値的に追うと、板が $13.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で上昇しているときに伸びが 0 になり、最高点は床から 11.07 m の高さとなる。これは $X+9.58$ と一致する。
- 単位：490 000 N / 10 m は $\mathrm{N\,m^{-1}}$ となるので、エネルギーの式の各項はすべてジュールである。

よくある間違い

- 着地の前後でエネルギー保存則を使ってしまい、一体となった速さを $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ではなく $\sqrt{20}\approx 4.47\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ としてしまう。
- 弾性エネルギーを自然長から測るときに最初の伸び 0.1 m を忘れる。増加する弾性エネルギーは $49\,000h^2$ ではなく $49\,000[(0.1+h)^2-0.1^2]$ である。
- 2 本のロープではなく、1 本のロープのばね定数を使ってしまう。

STEP のその先へ

2 本のロープは非線形ばね（nonlinear spring）である。引き伸ばされれば引っ張るが、縮められても押し返すことはできない。このように異なる運動方程式の間を切り替わる系は、区分線形振動子（piecewise-linear oscillator）あるいは「衝撃」振動子（impact oscillator）とよばれ、単純なものでさえ驚くほど複雑なふるまいを示すことがある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギー、衝突、振動を丁寧に扱っており、この問題全体の土台となる内容を学ぶことができる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。