解答例

STEP I 1988、第 12 問

力学 ・ 変化する力による運動

> **STEP I 1988、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q12

鍵となる考え方

それぞれの方法について、スケーターが岸に向かって最も遠くまで進む距離を求める。少なくとも一方の方法でその距離を d が上回るとき、そしてそのときに限り、彼女は安全である。方向転換は典型的な円運動（circular motion）である。速度に垂直な一定の大きさの力は半径一定の円を描かせ、その半径がさらに前進する距離になる。ブレーキは力が速さに依存する変力の問題であるが、求めたいのは**距離**である。これが、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くべき合図である。

解答

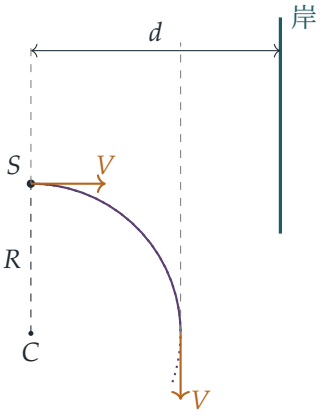
モデル

スケーターを、なめらかな水平の氷の上にある質量 M の質点（particle）として扱う。彼女にはたらく水平方向の力は彼女自身が加える力だけであるから、重力と垂直抗力（normal reaction）は打ち消し合い、以後は関係しない。出発点から岸に向かう向きに距離 x を測ると、岸は $x = d$ にある。

方法 1：円を描いて曲がる

速度に垂直な力は仕事をしないので、速さは V のまま変わらない。一定の速さ V の速度に常に直角にはたらく一定の大きさ F の力は、半径 R の円運動の向心力（centripetal force）となる。ここで

$$F = \frac{MV^2}{R}, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{MV^2}{F}.$$



彼女は S から岸に向かってまっすぐ進み始めるので、円の中心 C は S を通り岸に**平行**な直線上の、S から距離 R の点にある。角 θ だけ向きを変えたとき、岸に向かって進んだ距離は $x = R\sin\theta$ であり、これは $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 R をとる。そこで彼女は岸に平行に動いており、その後は岸から離れるように曲がっていく。したがって、彼女が岸にぶつからない条件は

$$d > \frac{MV^2}{F}.$$

（ちょうど $d = MV^2/F$ のときは、岸に沿って動きながら岸をかすめる。）

方法 2：ブレーキをかける

今度は力が運動の方向とちょうど逆向きにはたらくので、彼女は岸に向かって一直線に進みながら減速する。時間ではなく距離を求めたいので加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$Mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{F(V^2+v^2)}{2V^2}.$$

変数分離（separation of variables）を行い、$v = V$ となる $x = 0$ から、彼女が止まる点 $x = X$ まで積分すると

$$\begin{aligned}
\int_V^0 \frac{v}{V^2+v^2}\,\mathrm{d}v &= -\frac{F}{2MV^2}\int_0^X \mathrm{d}x,\\
\left[\tfrac{1}{2}\ln(V^2+v^2)\right]_V^0 &= -\frac{FX}{2MV^2},\\
\tfrac{1}{2}\ln\frac{V^2}{2V^2} &= -\tfrac{1}{2}\ln 2 = -\frac{FX}{2MV^2},
\end{aligned}$$

となるので、停止距離は

$$X = \frac{MV^2}{F}\ln 2.$$

考えてみよう 彼女は本当に静止するのだろうか。それとも、いつまでもじわじわ前進しながら速さが 0 に近づくだけなのだろうか。

ブレーキの力は決して $\frac{1}{2}F$ を下回らないので、速さは有限の時間で 0 になる。具体的には、$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F}{2V^2}(V^2+v^2)$ を積分すると $\frac{2MV}{F}(\arctan 1 - \arctan\frac{v}{V}) = t$ となるので、彼女は $t = \pi MV/(2F)$ で止まり、それまでに有限の距離 X だけ進む。（静止したら押すのをやめる。）したがって、$d > X$ ならブレーキで助かる。$d = X$ ならば速さ 0 で岸に達し、衝突することなく岸に触れる。

2 つの方法の比較

$\ln 2 \approx 0.693 < 1$ であるから、停止距離は回転半径より短い。つまりブレーキのほうがよい方法であり、方向転換でうまくいくときは必ずブレーキでもうまくいく。よって、彼女が岸への衝突を避けられるのは、ちょうど

$$\boxed{d > \frac{MV^2}{F}\ln 2}$$

のときである（$d = \frac{MV^2}{F}\ln 2$ は、静止した状態で岸に到着する境界の場合である）。

質点という仮定

実際のスケーターには大きさがある。体や腕は重心よりいくらか前に出ているので、実際には d が上の値よりおよそその分だけ大きくなければならない。より重要なのは、力が氷の上のスケート靴から生じることである。曲がるには内側に体を傾けなければならず、強くブレーキをかけるには刃を進行方向に対して横向きにひねる（ホッケーストップ）必要があり、そのとき体は横を向く。このような回転や姿勢こそ、質点モデルが無視しているものである。また、このモデルは、氷がなめらかであるとされているにもかかわらず、そもそも氷がこれらの力を供給できることを暗に仮定している。刃に沿った方向に摩擦がなくても、刃は横方向には氷をとらえるのである。

検算

- 単位：MV^2/F は $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}/N} = \mathrm{m}$ であり、当然そうあるべきとおり長さである。
- 上下からの評価：ブレーキの力は $\frac{1}{2}F$ と F の間にある。一定の力 F なら $MV^2/(2F)$ で止まり、一定の力 $\frac{1}{2}F$ なら MV^2/F で止まる。実際 $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$ である。
- 数値計算：ランダムな M、V、F（たとえば $R = MV^2/F = 7.0747$）に対して両方の運動をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値積分すると、方向転換

での最大前進距離は 7.0747、ブレーキでの停止距離は $4.9038 = R\ln 2$ となり、停止時刻は $\pi MV/(2F)$ であった。

よくある間違い

- 円の中心を彼女の横に置いて前進距離を R とすべきところを、運動の直線上（あるいは岸の上）に置いてしまい、前進距離を $2R$ や 0 としてしまう。
- ブレーキの場合に $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を使い、距離を求めるのに苦労する。$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を使えば 1 回の積分で求まる。
- 2 つの条件を比較せずに別々に答えてしまう。問題は彼女が逃れることができる d の範囲を問うているので、2 つの方法のうちよいほうが必要である。

STEP のその先へ

$\ddot{x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くことは、エネルギーを用いる方法への第一歩である。位置だけに依存する力に対しては、これは仕事とエネルギーの定理（work–energy theorem）そのものであり、大学の力学ではポテンシャル（potential）や、運動を相平面（phase plane）上に描く見方へと発展する。また、スケーターが方向転換とブレーキのどちらを選ぶかという問題は、単純な最適制御（optimal control）の問題でもある。限られた力を使って障害物を避けるには、どうするのが最善だろうか。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、速度に依存する力と円運動を、ちょうど一段上の水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。