解答例

STEP I 1988、第 11 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP I 1988、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q11

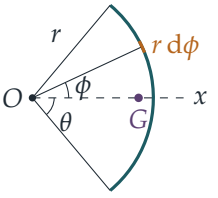
鍵となる考え方

円弧（arc）については、対称性から重心（centre of mass）は円弧を二等分する半径の上にあり、角度についての積分を一つ計算すれば中心からの距離が求まる。枠組み（framework）について注目すべき事実は、それが半円上のどの点で床に接しても釣り合うということである。床からの抗力（reaction）は常に半円の半径に沿って働き、それらすべての半径の上にある点は中心だけである。したがって、枠組み全体の重心は半円の中心でなければならず、その点のまわりのモーメント（moment）を考えると h についての方程式が得られる。

解答

一様な円弧

円弧の中心を O、単位長さあたりの密度（density）を ρ とする。角 ϕ を二等分する半径から測ることにすると、円弧は $-\theta \leq \phi \leq \theta$ と表される。x 軸を二等分線に沿ってとる。この軸に関する対称性から重心はこの軸上にあるので、$\bar{x}$ だけを求めればよい。



ϕ と $\phi + \mathrm{d}\phi$ の間の微小部分の長さは $r\,\mathrm{d}\phi$ であるから、その質量は $\rho r\,\mathrm{d}\phi$ であり、その

x 座標は $r\cos\phi$ である。全質量は $\rho r \cdot 2\theta$ である。よって

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_{-\theta}^{\theta} r\cos\phi \, \rho r \, \mathrm{d}\phi}{2\rho r\theta} = \frac{r[\sin\phi]_{-\theta}^{\theta}}{2\theta} = \frac{r\sin\theta}{\theta}.$$

したがって重心は二等分する半径の上にあり、中心からの距離は

$$\boxed{\bar{x} = \frac{r\sin\theta}{\theta}}$$

である。半円の弧では $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、この値は $\dfrac{2r}{\pi}$ となる。これが次に必要となる場合である。

枠組み：重心はどこになければならないか

枠組みは剛体（rigid body）であり、単位長さあたりの密度がすべて ρ に等しい一様な細い棒でできているとし、床は水平であるとモデル化する。半円の中心を O とする。これは長方形の下の辺の中点である。

> **考えてみよう** なぜ「半円上のどの点で接しても平衡である」という条件によって、重心が完全に決まるのだろうか。

枠組みが半円上の点 P で床に接して静止しているとする。床は P において半円の接線（tangent）となっているので、P を通る鉛直線はその接線に垂直であり、すなわち半径の直線 OP である。働く力は二つだけで、重心 G に働く重力と P における抗力である。平衡（equilibrium）であるためには、これらは同一直線上に働かなければならないので、G は P を通る鉛直線、すなわち直線 OP 上にある。これは半円上のすべての P について成り立つ。異なる二点 P からは O を通る異なる二直線が得られ、それらは O でしか交わらない。よって $G = O$ である。

逆に $G = O$ ならば、どの P についても重力は OP に沿って接点をまっすぐ通るように働くので、枠組みは床のどこで接しても平衡にある。したがって、条件はちょうど「G が O にある」ことと同値である。

下の辺のまわりのモーメント

下の辺の直線のまわりのモーメントを考え、高さは O から上向きに測る（したがって半円はこの直線より下にある）。各部分は次のとおりである。

部分	質量	重心の高さ	モーメント
上の棒	$2r\rho$	$2h$	$4rh\rho$
両側の棒 2 本	$2\times 2h\rho$	h	$4h^2\rho$
下の棒	$2r\rho$	0	0
半円	$\pi r\rho$	$-\dfrac{2r}{\pi}$	$-2r^2\rho$

半円の重心は円弧の公式で $\theta=\frac{\pi}{2}$ とおいて得られ、O より**下**にある。G の高さは 0 であるから全モーメントを 0 とおき、2ρ で割ると

$$2h^2+2rh-r^2=0.$$

これは h についての二次方程式（quadratic equation）であり、その解は

$$h=\frac{-2r\pm\sqrt{4r^2+8r^2}}{4}=\frac{(-1\pm\sqrt{3})\,r}{2}.$$

$h>0$ であるから正の解をとって

$$\boxed{h=\frac{(\sqrt{3}-1)\,r}{2}\approx 0.366\,r}$$

下の棒は自分自身の直線のまわりのモーメントが 0 であることに注意しよう。枠組みがこの棒を含むかどうかにかかわらず答えは同じであるから、図の読み方が多少異なっても問題はない。

検算

- $\theta\to 0$ のとき $\frac{r\sin\theta}{\theta}\to r$ である。すなわち、非常に短い円弧の重心は円弧そのものの上にある。円全体、すなわち $\theta=\pi$ のときは 0、つまり中心となり、対称性から要請されるとおりである。
- $h=\frac{(\sqrt{3}-1)r}{2}$ のとき、$2h^2=(2-\sqrt{3})r^2$、$2rh=(\sqrt{3}-1)r^2$ であり、これらの和は要求どおり r^2 となる。
- 各棒を 20 000 個の部分に分割して、重心を数値的に計算した。$r=1$、$h\approx 0.36603$ のとき、重心は O から 10^{-9} 以内にある。h を 10% 増やすと重心は約 0.03 上に移動し、枠組みはもはや釣り合わなくなる。

よくある間違い

- 半円形の**針金**（wire）に対する $\frac{2r}{\pi}$ の代わりに、半円形の**薄板**（lamina）に対する $\frac{4r}{3\pi}$ を用いてしまう。

- 長さではなく角度で重みをつけてしまう。微小部分の質量は $\rho r\,\mathrm{d}\phi$ であり、因子 r が約分されるのは、それが全質量にも現れるからにすぎない。
- 理由を示さずに G が O にあると主張してしまう。根拠は、抗力が常に半径に沿って働くということである。

STEP のその先へ

円弧についての積分は、曲線に沿った**線積分**（line integral）$\int \mathbf{r}\,\rho\,\mathrm{d}s$ として重心を表す最も簡単な例である。大学 1 年次の講義では、さらに二重積分や三重積分（double and triple integrals）を用いて曲面や立体の重心へと進み、パップス（Pappus）の定理によってこれらの重心が回転体の面積や体積と結びつけられる。釣り合いについての議論は、揺動安定性（rocking stability）の背後にある考え方でもある。曲面の上に置かれた物体は、その重心が曲率中心（centre of curvature）より下にあれば安定である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で重心と剛体の平衡を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。