解答例

STEP I 1988、第 10 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 1988、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q10

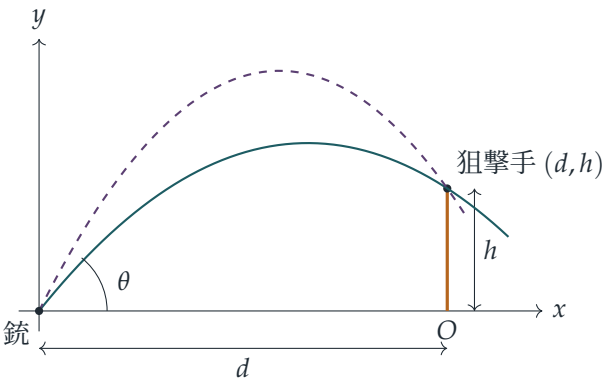
鍵となる考え方

問題を逆向きに考える。銃が木の根元から水平距離 d の位置にあるとして、「速さ v の弾丸が木の頂上を通るような仰角（angle of elevation）が少なくとも一つ存在するか」を問うのである。軌道（trajectory）の方程式を $\tan\theta$ を用いて書くと $\tan\theta$ についての 2 次方程式（quadratic equation）になるので、答えが「はい」となるのは、この 2 次方程式が実数解（real root）をもつときであり、かつそのときに限る。すると判別式（discriminant）の条件は、d だけについての不等式になることがわかる。

解答

モデル

弾丸を、重力のみを受けて運動する（空気抵抗（air resistance）はない）質点（particle）とみなし、地面の高さから速さ v、水平面からの角 θ で発射されるものとする。ただし $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である。銃の位置はわからないので、木の根元 O からの距離を $d \geq 0$ とし、銃を原点として、x 軸を木に向かう水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。このとき木の頂上は点 (d, h) である。



狙撃手に命中させる

時刻 t における弾丸の位置は $x = vt\cos\theta$、$y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ である。$\theta < \frac{\pi}{2}$ ならば $t = x/(v\cos\theta)$ を消去し、$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いると、軌道の方程式

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta).$$

が得られる。弾丸が狙撃手に命中するのは、(d, h) がこの曲線上にあるとき、かつそのときに限る。まず $d > 0$ とする。$T = \tan\theta$、$k = \dfrac{gd^2}{2v^2} > 0$ とおくと、条件は

$$kT^2 - dT + (h + k) = 0.$$

となる。任意の実数 T は、ただ一つの $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ によって $\tan\theta$ と表される。では、解が負になることはあるだろうか。2 解の積は $(h + k)/k > 0$、和は $d/k > 0$ であるから、実数解はいずれも正であり、正しく仰角 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を与える。したがって、条件を満たす仰角が存在するのは、この 2 次方程式が実数解をもつとき、すなわち判別式が負でないときであり、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned} d^2 - 4k(h + k) \geq 0 &\iff d^2 \geq \frac{2gd^2}{v^2}\left(h + \frac{gd^2}{2v^2}\right) \\ &\iff v^4 \geq 2ghv^2 + g^2d^2 \qquad (d^2 > 0 \text{ で割り、} v^4 \text{ を掛けた}) \\ &\iff d^2 \leq \frac{v^2}{g^2}(v^2 - 2gh). \end{aligned}$$

考えてみよう 銃がちょうど木の根元にあって $d = 0$ となり、上の軌道の方程式が使えない場合はどうなるか。

このとき弾丸は鉛直上向き（$\theta = \frac{\pi}{2}$）に発射されたはずであり、終速度が 0 以上であることから $v^2 = u^2 - 2gs$ により、高さ h に達するのは $v^2 \geq 2gh$ のとき、かつそのと

きに限る。これは上の条件で $d = 0$ としたものと同じであるから、この不等式はすべての場合を含んでいる。

$d \geq 0$ であるから、負でない平方根をとると

$$d \leq \frac{v}{g}\sqrt{v^2 - 2gh}.$$

を得る。よって銃は、水平な地面上で木の根元からの距離が $(v/g)\sqrt{v^2 - 2gh}$ 以下の点にあった。すなわち、木の根元を中心とし、この長さを半径とする円の内部（極端な場合には円周上）にあったことになり、題意は示された。平方根の中が負にならないのは、実際に射撃が行われたことがわかっているからである。実際、$d = 0$ のとき不等式から $v^2 \geq 2gh$ が導かれるが、これは弾丸が高さ h まで上がるのに十分なエネルギーをもつということにほかならない。

この条件は十分条件（sufficient condition）でもある。円の内部の任意の点から見ると、2 次方程式は相異なる二つの正の実数解をもつので、可能な仰角は二つある（図のように、低い弾道と高い弾道）。そして円周上ではこの二つが一致して一つになる。

検算

- $h = 0$ とすると半径は v^2/g となり、水平な地面上でのおなじみの最大到達距離（maximum range）に一致する。$v^2 \to 2gh$ とすると半径は 0 に縮む。このとき銃は、根元から真上に撃ってかろうじて狙撃手に届くだけである。
- 単位：$(v/g)\sqrt{v^2}$ の単位は $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$ である。
- 数値例として、$g = 9.8$、$v = 20$、$h = 8$ とすると半径は約 31.8 m である。$d = 31.8\,\mathrm{m}$ の位置から、唯一許される仰角 $\tan\theta = v^2/(gd)$ で運動を逐次計算すると、弾丸は木の位置で高さ 8.000 m に達する。あらゆる仰角について調べると、円の数パーセント外側の点には届かず、内側の点には届くことが確かめられる。

よくある間違い

- 最大到達距離 v^2/g や最高点の高さだけを用いてしまうこと。狙撃手は高さ h にいるので、両方の座標を同時に考えなければならない。
- $\tan\theta$ の解が水平より上向きの仰角を与えることの確認を忘れること、あるいは鉛直に撃つ場合 $d = 0$ を無視すること。

STEP のその先へ

v を固定すると、銃から到達できる点全体は放物線 $y = \dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2v^2}$ の下側の領域を埋め尽くす。この放物線は軌道の族の**包絡線**（envelope）であり、「安全放物線」（parabola of safety）と呼ばれる。判別式による条件は、まさに「$h \leq$ この包絡線の $x = d$ での値」ということである。曲線族の包絡線は、変分法（calculus of variations）や 1 階微分方程式（first-order differential equations）の理論でも再び登場する。このように丁寧に扱われた放物運動の問題に取り組むための次の一歩としては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。