解答例

STEP I 1988、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP I 1988、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/88-s1-q1

鍵となる考え方

方程式 $n^m = m^n$ では、変数が底と指数の間で入り混じっており扱いにくい。対数（logarithm）をとると $m\ln n = n\ln m$ となり、さらに mn で割ると変数は完全に分離される：$\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m}$。したがって、h が同じ値をとるような相異なる二つの整数を見つければよく、そのような組がどこに存在しうるかはグラフの形が正確に教えてくれる。

解答

h のグラフ

商の微分法（quotient rule）を用いて微分すると、

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$x^2 > 0$ であるから、$\mathrm{h}'(x)$ の符号は $1-\ln x$ の符号と一致する。よって h は $(0,\mathrm{e})$ で狭義単調増加（strictly increasing）、(e,∞) で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、$x = \mathrm{e}$ で最大値（maximum）

$$\mathrm{h}(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

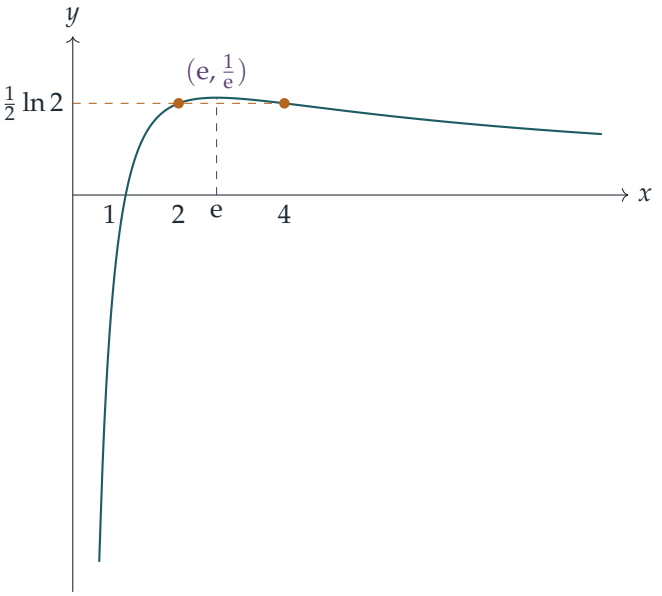
をとる。もう一度微分すると、

$$\mathrm{h}''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$$

となるので、$x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ に変曲点（point of inflection）があり、そこでは $\mathrm{h} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2} \approx 0.335$ である。曲線はこの点より左側で上に凸（concave）、右側で下に凸（convex）である。

次に、両端での振る舞いと符号を調べる：

- $x \to 0^+$ のとき、$\ln x \to -\infty$ かつ $\frac{1}{x} \to +\infty$ であるから、$\mathrm{h}(x) \to -\infty$ となる。すなわち y 軸は漸近線（asymptote）である。
- $\mathrm{h}(1) = 0$ であり、$\mathrm{h}(x)$ の符号は $\ln x$ の符号と一致する：$(0,1)$ で負、$x > 1$ で正である。
- $x \to \infty$ のとき $\frac{\ln x}{x} \to 0$ であり（対数は x のどんな正の累乗よりも増加が遅い）、そこでは $\mathrm{h}(x) > 0$ であるから、曲線は上側から x 軸に近づく。



方程式 $n^m = m^n$

m と n は正であるから両辺は正であり、対数をとることができる：

$$n^m = m^n \iff m \ln n = n \ln m \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln m}{m} \iff \mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(m),$$

ここで中央の段階では $mn > 0$ で割った。したがって、$\mathrm{h}(m) = \mathrm{h}(n)$ を満たす相異なる正の整数を求めればよい。対称性から $m < n$ と仮定する。

考えてみよう グラフ上で、異なる二点が同じ高さをもちうるのはどこか？

h は $(0, \mathrm{e}]$ で狭義単調増加、$[\mathrm{e}, \infty)$ で狭義単調減少であるから、それぞれの区間で一対一（one-to-one）である。よって、同じ値をとる相異なる二つの入力は e の両側に分かれていなければならない：$m < \mathrm{e} < n$。m は正の整数で $\mathrm{e} \approx 2.718$ であるから、$m = 1$ または $m = 2$ である。

- $m = 1$ ならば $\mathrm{h}(n) = \mathrm{h}(1) = 0$ となり、$\ln n = 0$ でなければならないから $n = 1 = m$ となって条件に反する。（直接見ても、$n^1 = 1^n$ から $n = 1$ である。）
- $m = 2$ ならば、$\mathrm{h}(n) = \frac{1}{2}\ln 2$ を満たす整数 $n \geq 3$ が必要である。$n = 4$ はこれを満たす。実際、
$$\mathrm{h}(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = \mathrm{h}(2),$$
すなわち $4^2 = 16 = 2^4$ である。h は $[\mathrm{e}, \infty)$ で狭義単調減少であるから、そこで値 $\frac{1}{2}\ln 2$ をとるのは高々一回であり、したがって $n = 4$ が唯一の可能性である。

以上より、$n^m = m^n$ を満たす相異なる正の整数の組は

$$(m, n) = (2, 4) \quad \text{および} \quad (m, n) = (4, 2).$$

のみである。

検算

$1 \leq m, n \leq 300$ のすべてについて厳密な整数演算でコンピュータ探索を行うと、見つかるのは $(2, 4)$ と $(4, 2)$ のみである。数値的には $\mathrm{h}(2) = \mathrm{h}(4) = 0.346574\ldots$ であり、グラフが示すとおり最大値 $1/\mathrm{e} = 0.367879\ldots$ をわずかに下回る。また、$\mathrm{h}(3)$ から解が得られない理由もわかる：$\mathrm{h}(3) \approx 0.366$ は $\mathrm{h}(2)$ より大きく、e の左側にあるその相方は 2 と e の間に厳密に位置するので、整数ではない。

よくある間違い

- 試行錯誤で $(2, 4)$ を見つけてそこで止めてしまう。問題は**すべての**組を求めているので、他に解がないことを証明する単調性（monotonicity）の議論こそが解答の核心である。
- 概形を描く際に漸近的な振る舞いを忘れる：曲線は y 軸に沿って $-\infty$ へ急降下するが、$x \to \infty$ では 0 へゆっくり近づくだけで、再び軸と交わることはない。

STEP のその先へ

実数まで許すと、$(1, \mathrm{e})$ の各 a に対して $a^b = b^a$ を満たす相方 $b > \mathrm{e}$ がちょうど一つ存在し、これらの組は $t > 0$ を用いて $a = (1 + \frac{1}{t})^t$、$b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$ ときれいにパラメータ表示（parametrise）できる。$t \to \infty$ のとき両者はともに e に収束（converge）し、これがグラフの頂点での合流点である。ここで用いた極限 $\frac{\ln x}{x} \to 0$ は増加の速さ

（growth rate）の比較の最初の例であり、解析学（analysis）の入門課程で厳密に扱われる。Abbott, *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。