解答例

STEP III 1987、第 8 問

純粋数学 • 平行四辺形の面積に関する不等式

> **STEP III 1987、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q8

鍵となる考え方

平行四辺形（parallelogram）の対角線（diagonal）は互いに他を二等分するので、平行四辺形は 4 つの三角形に分けられ、それぞれの面積は $\frac{1}{2}ab\sin C$ を用いてただちに書き下せる。これにより、対角線とそのなす角による面積の公式が得られ、冒頭の 2 つの結果はどちらもそこから直ちに導かれる。集合 A は 2 つの帯状領域（strip）が交わる部分であるから、平行四辺形である。その面積を求めれば、2 つ目の結果から長い方の対角線が長くなければならないことがわかり、その対角線の両端が求める 2 点となる。

解答

対角線による面積の表示

対角線の長さを p と q とし、それらが角 θ で交わるとする。ただし $0 < \theta < \pi$ である。平行四辺形の対角線は互いに他を二等分するので、平行四辺形は 4 つの三角形に分けられ、どの三角形も中心で交わる長さ $\frac{1}{2}p$ と $\frac{1}{2}q$ の 2 辺をもつ。そのうち 2 つの三角形は中心での角が θ であり、残りの 2 つは $\pi - \theta$ である。$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ であるから、各三角形の面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2}\sin\theta$ であり、したがって

$$\text{面積} = 4 \cdot \tfrac{1}{8}pq\sin\theta = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta.$$

p と q を固定すると、これは $\sin\theta$ が最大のとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときに最大となる。よって面積が最大となるのは対角線が垂直であるときであり、かつそのときに限る。最大面積は $\frac{1}{2}pq$ である。

長い方の対角線による上界

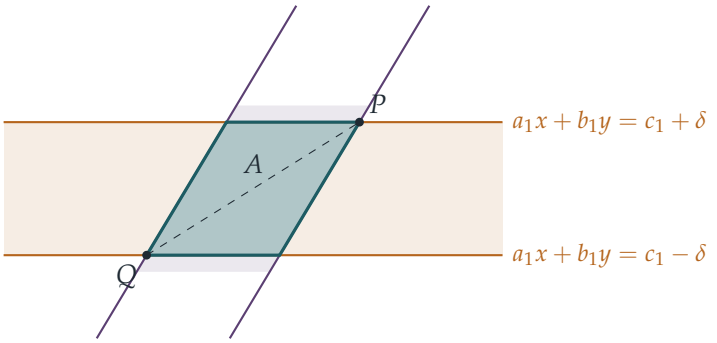
$p \geq q$ とし、p が長い方の対角線（または等しい 2 本のうちの 1 本）であるとする。$\sin\theta \leq 1$、次いで $q \leq p$ を用いると

$$\text{面積} = \tfrac{1}{2}pq\sin\theta \leq \tfrac{1}{2}pq \leq \tfrac{1}{2}p^2.$$

よって面積は長い方の対角線の長さの 2 乗の半分以下である。等号成立には $\sin\theta = 1$ かつ $q = p$ が必要なので、等号が成り立つのは正方形の場合に限る。

集合 A は平行四辺形である

$\delta > 0$ と仮定する。（$\delta = 0$ ならば上界は 0 であり、A の任意の 1 点を 2 回選べばよい。）不等式 $|a_1x + b_1y - c_1| \leq \delta$ は $c_1 - \delta \leq a_1x + b_1y \leq c_1 + \delta$ を意味する。よってこれは、2 本の平行な直線 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ に挟まれた閉じた帯状領域を表す。2 つ目の不等式も同様に 2 つ目の帯状領域を与える。条件 $a_1b_2 \neq a_2b_1$ は、法線ベクトル（normal vector）$\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ と $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$ が平行でないことを意味する。したがって 2 つの帯状領域は交差し、$\mathbf{n}_1$ も $\mathbf{n}_2$ も零ベクトルではない。それらの共通部分 A は 2 組の平行な直線で囲まれた平行四辺形である。



図は 1 つ目の帯状領域（琥珀色）と 2 つ目の帯状領域の一部（紫色）を示している。それらの共通部分 A（青緑色）は平行四辺形であり、破線はその長い方の対角線である。

A の面積

点と直線の距離の公式を用いると、平行な直線 $a_1x + b_1y = c_1 \pm \delta$ の間の距離は

$$h_1 = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

である。同様に、2 つ目の帯状領域の幅は $h_2 = 2\delta/\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ である。2 組の直線のなす角を φ とし、$0 < \varphi < \pi$ とする。A の辺のうち 2 つ目の帯状領域の境界上にあるも

のは、1つ目の帯状領域を角 φ で横切るので、それぞれの長さは $h_1/\sin\varphi$ である。これら2辺の間の距離は h_2 であるから

$$\text{面積} A = \frac{h_1 h_2}{\sin\varphi}.$$

考えてみよう 係数から $\sin\varphi$ をどのように求めればよいか？

2直線のなす角は、それらの法線のなす角またはその補角に等しく、どちらも正弦は同じである。ベクトル $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ と $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$ が張る平行四辺形の面積は $|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\sin\varphi$ である。この面積は 2×2 の行列式（determinant）の絶対値 $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ にも等しい。よって

$$\sin\varphi = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

これを代入すると、平方根は約分されて

$$\text{面積} A = \frac{2\delta}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \frac{2\delta}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} = \frac{4\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}.$$

2つの点

PQ を A の長い方の対角線とし、$P = (x_1, y_1)$、$Q = (x_2, y_2)$ とおく。これらは A の頂点であり、帯状領域は境界の直線を含むので、A に属する。前半で得た上界により

$$\frac{4\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} = \text{面積} A \le \tfrac{1}{2} PQ^2,$$

であるから

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = PQ^2 \ge \frac{8\delta^2}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|},$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $a_1 = b_2 = 1$、$a_2 = b_1 = 0$ とすると、A は正方形 $|x - c_1| \le \delta$、$|y - c_2| \le \delta$ となる。その対角線の長さの2乗は $(2\delta)^2 + (2\delta)^2 = 8\delta^2$ であり、ちょうど上界に一致する。正方形は前半の等号成立の場合なので、これは辻褄が合っている。
- スケーリング：a_1、b_1、c_1 を2倍にすると、1つ目の帯状領域の幅は半分になり、A の面積も半分になり、$|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ は2倍になる。公式は正しく振る舞う。

- コンピュータで 10^5 個の無作為な場合を検証した。境界の方程式を解いて A の頂点を求めたところ、靴ひも公式（shoelace formula）による面積は毎回 $4\delta^2/|a_1b_2 - a_2b_1|$ に一致した。（長い方の対角線）^{2} と上界の比の最小値は 1.0007 であり、1 を下回ることは一度もなかった。

よくある間違い

- 帯状領域の幅を 2δ としてしまう。$|a_1x + b_1y - c_1| \le \delta$ の幅は $2\delta/\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ である。
- 選んだ点がなぜ A に属するのかを述べ忘れる。それらは頂点であり、A は境界を含むので属するのである。
- A の面積を h_1h_2 と書いてしまう。これは帯状領域が垂直に交わるときにしか正しくない。

STEP のその先へ

この面積の計算は、ある基本的な事実の特別な場合である。すなわち、行列 M で表される線形写像（linear map）はすべての面積を $|\det M|$ 倍する。ここでは写像 $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$ が A を面積 $4\delta^2$ の正方形に移すので、A の面積は $4\delta^2/|\det M|$ となる。これは 2 重積分で変数変換をするときに現れるヤコビアン（Jacobian）の因子である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このように行列式を面積や体積として展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。