解答例

STEP III 1987、第 7 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の級数

STEP III 1987、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q7

鍵となる考え方

$\tan^{-1} t$ の級数は $1/(1+x^2)$ を積分することで得られ、$1/(1+x^2)$ は公比 $-x^2$ の等比級数（geometric series）の和である。等比級数を有限項で打ち切ると**厳密な**剰余項（remainder）が残り、その剰余項を積分すると誤差項（error term）が得られる。$[0,1]$ 上では因子 $1/(1+x^2)$ は $\frac{1}{2}$ と 1 の間にあるので、誤差は計算の容易な二つの積分の間に挟み込まれる。

解答

恒等式

任意の実数 x に対して、初項 1、公比 $-x^2$ の有限等比級数から

$$\sum_{r=0}^{n}(-x^2)^r = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

が成り立つ。公比 $-x^2$ は決して 1 に等しくならないので、これは正しい。整理すると

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

これは近似ではなく厳密な恒等式である。両辺を 0 から t まで積分する。$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} t$ および $\int_0^t x^{2r}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{2r+1}}{2r+1}$ であるから、

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、示すべき式が得られた。これはすべての実数 t に対して成り立つ。

評価

$S_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r t^{2r+1}}{2r+1}$ とおく。恒等式より

$$\left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| = \int_0^t \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

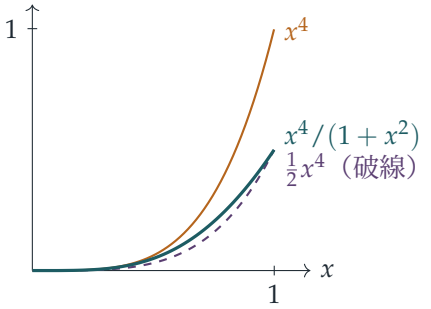
である。ここで右辺の絶対値を外してよいのは、$t \geq 0$ のとき被積分関数（integrand）が非負であり、積分が正の向きに行われるからである。

> **考えてみよう** 閉じた形で計算できない積分は、どのように評価すればよいだろうか。

被積分関数の扱いにくい部分を定数で評価する。$0 \leq x \leq 1$ のとき $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ であるから

$$\tfrac{1}{2}x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}.$$

下の図は $n = 1$ の場合を示している。被積分関数（ティール色）は x^4 と $\frac{1}{2}x^4$ の間に挟まれている。



これらの不等式を 0 から t まで積分すると（$t \geq 0$ なので不等号の向きは保たれる）、

$$\frac{t^{2n+3}}{2(2n+3)} \leq \left|\tan^{-1} t - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

これが求める結果である。

π の級数

$t = 1$ とおく。このとき $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$、$S_n(1) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}$ である。上からの評価より

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3} \to 0 \quad \text{ただし} n \to \infty,$$

となるので、$4\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{2r+1} \to \pi$ である。

考えてみよう 二つの評価のうち、近似が**悪い**ことを教えてくれるのはどちらだろうか。

下からの評価である。これは誤差が小さくなり得ないことを述べている。$t=1$ における左側の不等式に 4 を掛けると

$$\left|\pi - 4\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2r+1}\right| \geq \frac{4}{2(2n+3)} = \frac{2}{2n+3}.$$

$n \leq 98$ ならば $2n+3 \leq 199 < 200$ であるから、$\frac{2}{2n+3} > \frac{2}{200} = 10^{-2}$ となる。したがって、すべての $n \leq 98$ に対して誤差は 10^{-2} 以上（実際には真に大きい）である。誤差は $4/(2n+3)$ より小さいので、百項使ってもおよそ小数第 2 位までしか得られない。つまり、この級数は π を計算するには非常に遅い方法である。

検算

- $n=0$、$t=1$ のとき、評価式は $\frac{1}{6} \leq \left|\frac{\pi}{4} - 1\right| \leq \frac{1}{3}$ を与える。実際 $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$ である。
- 数値的には、$n=98$ のとき誤差は $|\pi - 4S_{98}(1)| \approx 0.01010$ で、10^{-2} をわずかに上回る。$n=99$ のときは約 0.0099998 で、わずかに下回る。よって 98 がちょうど境目である。また、ランダムな t と n について数値積分（quadrature）で恒等式を確かめ、数千個のランダムな $t \in [0,1]$ について両側からの評価を確かめた。

よくある間違い

- $1/(1+x^2)$ を**無限**級数に展開して項別積分すること。これには $|x|<1$ であることと、和と積分の順序交換の正当化が必要になる。厳密な剰余項をもつ有限の形を使えば、どちらも避けられる。
- 上からの評価を使って誤差が大きいと論じること。それができるのは下からの評価だけである。

STEP のその先へ

これは積分形の剰余項をもつテイラーの定理（Taylor's theorem）を、一つの関数について手計算で導いたものである。$t=1$ における級数はライプニッツ（Leibniz）級数（あるいはマーダヴァ（Madhava）–グレゴリー（Gregory）級数）である。その誤差がおよそ $1/(2n)$ であることは、項がゆっくり減少する交代級数（alternating series）

に典型的な性質である。マチン（Machin）の公式 $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$ のような、より速い公式は、同じ級数を小さな t で用いる。そこでは t^{2n+3} が急速に小さくなる。剰余項と収束（convergence）の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。