解答例

STEP III 1987、第 6 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

> **STEP III 1987、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q6

鍵となる考え方

連立された一階微分方程式（coupled first-order equations）の組は、一つの未知関数に関する一本の二階微分方程式（second-order equation）に直すのが最もよい。第 1 式から y を x と $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で表すことができ、これを第 2 式に代入すると、x に関する強制振動（forced oscillator）の方程式が残る。そうすると、答えの性質全体は、その振動子の固有振動数（natural frequency）が外力 $2\cos t$ の振動数とどう比較されるかによって決まる。

解答

t に関する導関数をドットで表す。

y の消去

第 1 式より、

$$y = \tfrac{1}{5}\left(\dot{x} + 2x\right), \qquad \text{よって} \qquad \dot{y} = \tfrac{1}{5}\left(\ddot{x} + 2\dot{x}\right).$$

これらをともに第 2 式に代入し、5 を掛けると、

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5ax - 2\left(\dot{x} + 2x\right) = 10\cos t,$$
$$\ddot{x} + (5a - 4)\,x = 10\cos t.$$

$\dot{x}$ の項が打ち消し合うので、減衰（damping）はない。これは固有振動数 $\sqrt{5a-4}$（$5a > 4$ のとき）をもつ純粋な強制振動である。

初期条件の読み替え

与えられているのは $x(0)=0$ と $\dot{y}(0)=0$ であるが、x の方程式に必要なのは $x(0)$ と $\dot{x}(0)$ である。もとの第2式に $t=0$ を代入すると、

$$\dot{y}(0)+a\,x(0)-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad 0+0-2y(0)=2 \quad\Longrightarrow\quad y(0)=-1.$$

次に $t=0$ における第1式から $\dot{x}(0)=5y(0)-2x(0)=-5$ を得る。どちらの段階でも a の値を用いていないことに注意すると、

$$x(0)=0, \qquad \dot{x}(0)=-5 \qquad \text{すべての} a.$$

が成り立つ。

> **考えてみよう** 条件は y ではなく $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ についてのものである。これをどう使えばよいか？

微分方程式そのものが、任意の一つの時刻における x、y およびそれらの導関数の値を結びつけている。$t=0$ において、第2式は $\dot{y}(0)$ に関する情報を $y(0)$ に関する情報に変え、さらに第1式がそれを $\dot{x}(0)$ に変える。これはまさに x に関する二階微分方程式が必要とするものである。

$a=1$ の場合

このとき方程式は

$$\ddot{x}+x=10\cos t.$$

となる。余関数（complementary function）は $A\cos t+B\sin t$ である。外力 $\cos t$ はそれ自身が同次方程式（homogeneous equation）の解である（これが共鳴（resonance）である）ので、$C\cos t$ と置いても失敗する。そこで $x_p=t\,(C\cos t+D\sin t)$ と置く。2回微分すると、

$$\ddot{x}_p+x_p=-2C\sin t+2D\cos t,$$

となるので $C=0$、$D=5$ であり、$x_p=5t\sin t$ を得る。したがって

$$x=A\cos t+B\sin t+5t\sin t.$$

条件 $x(0)=0$ より $A=0$ である。すると $\dot{x}=B\cos t+5\sin t+5t\cos t$ であるから、$\dot{x}(0)=B=-5$ となる。ゆえに

$$\boxed{x=5(t-1)\sin t}$$

y については、$\dot{x}=5\sin t+5(t-1)\cos t$ とともに $y=\frac{1}{5}(\dot{x}+2x)$ を用いると、

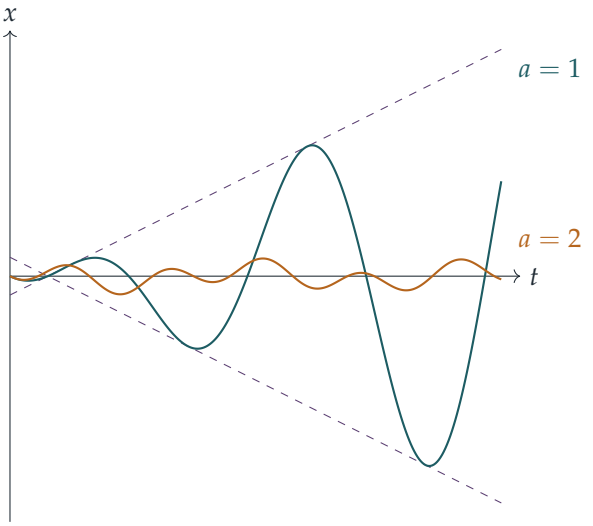
$y=\sin t+(t-1)\cos t+2(t-1)\sin t,$ すなわち $\boxed{y=(t-1)\cos t+(2t-1)\sin t}$

簡単な確認として、$y(0) = -1$ であり、$\dot{y} = \cos t - (t-1)\sin t + 2\sin t + (2t-1)\cos t$ から $\dot{y}(0) = 1 - 1 = 0$ となって、条件を満たしている。

$a > 1$ の場合

このとき $5a - 4 > 1$ であるから、$\omega = \sqrt{5a-4}\,(\omega > 1)$ とおく。方程式 $\ddot{x} + \omega^2 x = 10\cos t$ は、外力の振動数 1 が固有振動数 ω と異なるので、もはや共鳴の状態にはない。したがって次のようになる。

- 余関数は $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ であり、周期 2π ではなく周期 $2\pi/\omega$（2π より短い）で振動する。
- 特殊解（particular integral）は単に $\cos t$ の定数倍であり、t の因子をもたないので、$t\sin t$ のような項は現れない。
- よって x（および同様に $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$）は振動数 1 と ω の正弦波の和である。$a = 1$ のときのように振幅が t に比例して増大しながら振動するのではなく、どちらもすべての t で有界にとどまる。運動が周期的になるのは ω が有理数のときに限られる。一般には、互いに「うなり」（beats）を生じる二つの振動の重ね合わせである。



検算

- $x = 5(t-1)\sin t$ と $y = (t-1)\cos t + (2t-1)\sin t$ をもとの両方の方程式に代入し直すと、恒等的に成り立つ。逐次的な数値解法（$x = 0$、$y = -1$ から始める 4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））による解は、$0 \le t \le 10$ において 10^{-10} 以内の精度で公式と一致する。たとえば $x(10) = 45\sin 10 \approx -24.481$ である。

- $a > 1$ のとき、完全な解は $x = \frac{2}{a-1}(\cos t - \cos \omega t) - \frac{5}{\omega} \sin \omega t$ となることがわかる。$a \to 1$ のとき $\omega - 1 \approx \frac{5}{2}(a-1)$ および $\cos t - \cos \omega t \approx (\omega - 1)\, t \sin t$ であり、これから $5t \sin t - 5 \sin t$ が得られる。共鳴の場合の答えは、非共鳴の場合の答えの極限なのである。

よくある間違い

- $\dot{y}(0)$ に関する条件から $y(0) = -1$ を導かずに、$y(0) = 0$ を用いてしまう。
- $a = 1$ のときに特殊解として $C \cos t + D \sin t$ を試してしまう。これは余関数の一部であるから、$0 = 10 \cos t$ が出てきてしまう。
- 新たな任意定数を用いて y を別に解いてしまう。x が求まれば、y は $y = \frac{1}{5}(\dot{x} + 2x)$ によって決まる。

STEP のその先へ

このような線形の連立方程式は、実は $\mathbf{v} = (x, y)$ と定数行列（matrix）M を用いた $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$ という形をしている。M の固有値（eigenvalues）は、ここでは $\pm\sqrt{4 - 5a}$ であり、外力のない運動が増大するか、減衰するか、振動するかを決める。共鳴は外力の振動数が固有値 $\pm\mathrm{i}$ と一致するときに起こり、それはちょうど $a = 1$ のときである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、行列を用いた連立方程式と、共鳴やうなりを伴う強制振動の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。